Der Schubert-Zellkomplex der Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Stefan Bechtluft-Sachs

27. September 2004

Der Schubert-Zellkomplex der Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Die Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G_n(N) = O(N)/(O(n) \times O(N-n)$ kann man sich vorstellen als Menge der n-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^N$. Eine ausführliche Diskussion dieser Räume findet man z.B. in [Wolf], [Whitehead] S. 204. Betrachte die Untermannigfaltigkeit

$$\bar{S} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}^{N-n+i}, \langle a_i \mid a_j \rangle = \delta_{i,j}\}$$

von $S^{N-n} \times \ldots \times S^{N-1}$. Auf $\bar{S}$ operiert die Gruppe $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{(\mu(1), \ldots, \mu(n)) \mid \mu(i) = \pm 1\}$ durch

$$(\mu(1), \ldots, \mu(n)) \times (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\mu(1)a_1, \ldots, \mu(n)a_n) \; .$$

Für $a \in \mathbb{R}^N$ sei $\sigma(a) = \min\{q \in \mathbb{N} \mid a \in \mathbb{R}^q\}$ und für $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \bar{S}$ schreiben wir $\sigma(a) = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$. Die Wirkung von G schränkt sich auf die Teilmenge

$$S = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \bar{S} \mid 0 < \sigma(a_1) < \ldots < \sigma(a_n) \leq N\}$$

ein. Der Quotient S/G ist die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_n(N)$.
Zunächst definieren wir eine G-invariante Zellzerlgung von S. Für $\sigma = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq N$ benutzen wir folgende Notation:

$$\begin{aligned}
S_\sigma &:= \{(a_1, \ldots, a_n) \in S \mid a_i \in \mathbb{R}^{s_i}\} \\
|\sigma| &:= \sum_{i=1}^{n} s_i - i \\
\sigma_l &:= (s_1, \ldots, s_l - 1, \ldots, s_n) \\
\mu_l &:= (\mu(1), \ldots, \mu(l-1), -\mu(l), \mu(l+1), \ldots, \mu(n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_k &:= \bigcup_{|\sigma|=k} S_\sigma \\ e^{(\sigma,\mu)} &:= \{(a_1,\ldots,a_n)\in S \mid a_i \in \mathbb{R}^{s_i}, \operatorname{sgn}\langle a_i \mid e_{s_i}\rangle = \mu(i)\} \ . \end{aligned}$$

Dann ist

$$S_\sigma = S_{\sigma_l} \cup \bigcup_{\mu\in G} e^{(\sigma,\mu)}$$

und

$$S_k = S_{k-1} \cup \bigcup_{\mu\in G, |\sigma|=k} e^{(\sigma,\mu)} \ .$$

Die Parametrisierung der Zellen

Abhängig von σ fassen wir die Standard-$|\sigma|$-Zelle $D^{|\sigma|}$ auf als

$$\Delta^{|\sigma|} = D^{s_1} \times \ldots \times D^{s_n}$$

und definieren vermöge dieser Identifkation eine Abbildung

$$(\sigma,\mu) : \Delta^{|\sigma|} \to S_\sigma$$

durch

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (a_1,\ldots,a_n)$$

mit

$$a_k = R^{a_{k-1}}_{\mu_{k-1}e_{s_{k-1}}} \cdots R^{a_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^\sigma x_k, \mu(k)\sqrt{1-x_k^2} \ .$$

Dabei bildet

$$\begin{aligned} F^\sigma : \mathbb{R}^{s_k-k} &\to \mathbb{R}^{s_k-1} \\ (\xi_1\ldots\xi_{s_k-k}) &\mapsto (\xi_1\ldots\xi_{s_1-1}, 0, \xi_{s_1},\ldots,\xi_{s_2-2}, 0, \ldots, \xi_{s_k-k}) \end{aligned}$$

ab, d.h. die j-te Koordinate ist

$$(F^\sigma(\xi_1\ldots\xi_{s_k-k}))_j = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad j\in\sigma \\ \xi_{j-\#\{q|s_q<j, s_q\in\sigma\}} & \text{wenn} \quad j\notin\sigma \end{cases}$$

Wenn $a_q = \mu(q)e_{s_q}$, so sei $R^{a_q}_{\mu(q)e_{s_q}} = id_{\mathbb{R}^{s_k}}$. Andernfalls sei $R^{a_q}_{\mu(q)e_{s_q}}$ die Drehung in der von a_q und e_{s_q} erzeugten Ebene des $\mathbb{R}^{s_k}$, die $\mu(q)e_{s_q}$ auf a_q dreht und auf dem orthogonalen Komplement dieser Ebene die Identität ist. (Diese Ebene ist dann wohldefiniert, da $\langle a_q \mid \mu(q)e_{s_q}\rangle \geq 0$.) Die Einschränkung von (σ,μ) auf den Rand

$$\partial\Delta^{|\sigma|} = \bigcup_{q=1}^{n} \partial_q D^{|\sigma|} \ ,$$

$$\partial_q \Delta^{|\sigma|} = D^{s_1-1} \times \cdots \times D^{s_{q-1}-(q-1)} \times S^{s_q-q-1} \times D^{s_{q+1}-(q+1)} \times \cdots \times D^{s_n-n}$$

der Standard-$|\sigma|$-Zelle liefert die Anklebeabbildung. Wir erhalten

Satz 1 *Eine Zellzerlegung von S ist gegeben durch*

1. *Das k-Skelett von S ist S_k für $k = 0 \dots n(N-n)$.*

2. *S_k entsteht aus S_{k-1} durch Ankleben einer k-Zelle für jedes σ mit $|\sigma| = k$ durch $(\sigma, \mu) : \Delta^\sigma \to S_{k-1}$.*

Diese Zellzerlegung ist regulär, d.h. die Anklebeabbildungen sind Einbettungen.

Die Inzidenzmatrizen

Aufgrund der Regularität dieser Zellzerlegung sind die Abbildungsgrade der Anklebeabbildungen und damit die Einträge der Inzidenzmatrizen gleich ± 1 oder 0. Um diese Einträge zu bestimmen, vergleichen wir die Parametrisierungen, die wir auf $e^{(\sigma_l, \mu')}$ erhalten, wenn wir die (σ, μ) auf $\partial_l \Delta^{|\sigma|}$ einschränken, mit der „direkten" Parametrisierung durch (σ_l, μ'). Dabei kommen nur die Fälle $\mu' = \mu$ und $\mu' = \mu_l$ vor. Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ orientieren wir dabei so, daß eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von $T_x S^n$ genau dann orientiert ist, wenn $v_1, \dots, v_n, x$ und $e_1, \dots, e_{n+1}$ gleich orientiert sind. Die Parametrisierung

$$\chi_\pm : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{l-1}, (y_l, \pm\sqrt{1 - y_l^2}), y_{l+1}, \dots, y_n)$$

von $\partial_l \Delta^{|\sigma|}$ hat dann

$$\operatorname{sgn}(\chi_\pm) = \pm(-1)^{\sum_{q=l+1}^{n}(s_q - q)} \; .$$

Sei im folgenden $\nu = 1$, wenn $\mu' = \mu$ und $\nu = -1$, wenn $\mu' = \mu_l$.

$$(x_1, \ldots, x_n) \overset{(\sigma,\mu)}{\longmapsto} \begin{cases} a_1 &= F^\sigma x_1, \mu(1)\sqrt{1-x_1^2} \\ \cdot & \\ a_{l-1} &= R^{a_{l-2}}_{\mu(l-2)e_{s_{l-2}}} \cdots R^{a_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^\sigma x_{l-1}, \mu(l-1)\sqrt{1-x_{l-1}^2} \\ a_l &= R^{a_{l-1}}_{\mu(l-1)e_{s_{l-1}}} \cdots R^{a_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^\sigma x_l, \mu(l)\sqrt{1-x_l^2} \\ a_{l+1} &= R^{a_l}_{\mu(l)e_{s_l}} \cdots R^{a_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^\sigma x_{l+1}, \mu(l+1)\sqrt{1-x_{l+1}^2} \\ \cdot & \\ a_n &= R^{a_{n-1}}_{\mu(n-1)e_{s_{n-1}}} \cdots R^{a_l}_{\mu(l)e_{s_l}} \cdots R^{a_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^\sigma x_n, \mu(n)\sqrt{1-x_n^2} \end{cases}$$

$$\uparrow \chi_{\nu\mu(l)}$$

$$(y_1, \ldots, y_n) \overset{(\sigma_l,\mu')}{\longmapsto} \begin{cases} b_1 &= F^{\sigma_l} y_1, \mu(1)\sqrt{1-y_1^2} \\ \cdot & \\ b_{l-1} &= R^{b_{l-2}}_{\mu(l-2)e_{s_{l-2}}} \cdots R^{b_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^{\sigma_l} y_{l-1}, \mu(l-1)\sqrt{1-y_{l-1}^2} \\ b_l &= R^{b_{l-1}}_{\mu(l-1)e_{s_{l-1}}} \cdots R^{b_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^{\sigma_l} y_l, \nu\mu(l)\sqrt{1-y_l^2} \\ b_{l+1} &= R^{b_l}_{\nu\mu(l)e_{s_l-1}} \cdots R^{b_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^{\sigma_l} y_{l+1}, \mu(l+1)\sqrt{1-y_{l+1}^2} \\ \cdot & \\ b_n &= R^{b_{n-1}}_{\mu(n-1)e_{s_{n-1}}} \cdots R^{b_l}_{\nu\mu(l)e_{s_l-1}} \cdots R^{b_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^{\sigma_l} y_n, \mu(n)\sqrt{1-y_n^2} \end{cases}$$

Die Inzidenzzahl $[(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu')]$ ist dann der Grad von

$$(\sigma_l, \mu')^{-1} \circ (\sigma, \mu) \circ \chi_{\nu\mu(l)}(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y'_1, \ldots, y'_n) \ ,$$

wobei

$$y'_j = y_j$$

für $j \leq l$. Für $j > l$ ist

$$\begin{aligned} y'_j &= (R^{a_{j-1}}_{\mu(j-1)e_{s_{j-1}}} \cdots R^{a_l}_{\nu\mu(l)e_{s_l-1}} \cdots R^{a_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^{\sigma_l})^{-1} \times \\ &\quad R^{a_{j-1}}_{\mu(j-1)e_{s_{j-1}}} \cdots R^{a_l}_{\mu(l)e_{s_l}} \cdots R^{a_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^\sigma y_{l+j}, \mu(j)\sqrt{1-y_{l+j}^2} \\ &= (R^{a_{l-1}}_{\mu(l-1)e_{s_{l-1}}} \cdots R^{a_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^\sigma)^{-1} (R^{a_l}_{\nu\mu(l)e_{s_l-1}})^{-1} R^{a_l}_{\mu(l)e_{s_l}} \cdots R^{a_1}_{\mu(1)e_{s_1}} F^\sigma y_j, \mu(j)\sqrt{1-y_j^2} \ . \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} [(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu)] &= \mu(l)(-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)} \\ [(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu_l)] &= -\mu(l)(-1)^{\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)} \end{aligned}$$

Um den Kettenkomplex von $G_n(N)$ zu bestimmen, brauchen wir noch die Operation von G. Bezeichnen wir mit $\pi : S \to G_n(N)$ die Quotientenabbildung und τ_l die Punktspiegelung des l-ten Vektors, also

$$\tau_l : (a_1, \ldots, a_{l-1}, a_l, a_{l+1}, \ldots, a_n) \mapsto (a_1, \ldots, a_{l-1}, -a_l, a_{l+1}, \ldots, a_n)$$

so erhalten wir

$$\tau_l(\sigma, \mu) = (-1)^{s_l - l}(\sigma, \mu_l) \ .$$

und können die Zelle (σ) von $G_n(N)$ so orientieren, daß $\pi(\sigma, (1, \ldots, 1)) = \sigma$. Damit folgt mit $\mu = (1, \ldots, 1)$ aus der Äquvarianz der Zellzerlegung von S unter der Wirkung von G, daß

$$\begin{aligned}
\partial(\sigma) &= \partial\pi(\sigma, \mu) = \pi\partial((\sigma, \mu) \\
&= \pi([(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu)](\sigma_l, \mu) + [(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu_l)](\sigma_l, \mu_l) + \mathcal{R}) \\
&= ([(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu)]\pi(\sigma_l, \mu) + [(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu_l)]\pi(\sigma_l, \mu_l) + \mathcal{R}) \\
&= (-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^{n}(s_q - q)}(\sigma_l) + -(-1)^{\sum_{q=l+1}^{n}(s_q-q)}(-1)^{s_l-1-l}(\sigma_l) + \mathcal{R}) \\
&= ((-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^{n}(s_q-q)} - (-1)^{\sum_{q=l+1}^{n}(s_q-q)}(-1)^{s_l-1-l})(\sigma) + \mathcal{R}) \ ,
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{R}$ den Beitrag von Zellen bezeichnet, die unter π nicht auf (σ) abgebildet werden. Die Inzidenzzahl in $G_n(N)$ ist also

$$[(\sigma) : (\sigma_l)] = (-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^{n}(s_q-q)}(1 + (-1)^{s_l - n}) \ .$$

Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ergeben sich daraus unmittelbar: Die Inzidenzzahl $[(\sigma) : (\sigma_l)]$ ist immer gleich 0 modulo 2 und damit sind die zellulären Kettengruppen schon die Homologiegruppen. Wir erhalten also

Satz 2 *Die Homologie der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_n(N)$ mit Koeffizienten $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist*

$$H_q(G_n(N), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{(s_1, \ldots, s_n) \mid 1 \leq s_1 < s_2 < \ldots s_n \leq N, \sum_{i=1}^{n} s_i - i = q\} \ .$$

Schließlich geben wir noch die Inzidenzzahlen für die orientierten Gassmann-Mannigfaltigkeit

$$G_n^+(N) := \{(V, \mathcal{O}) \mid V \subset \mathbb{R}^N \text{ Untervektorraum}, \dim V = n, \mathcal{O} \text{ eine Orientierung auf } V\}$$

an. Fassen wir $G \subset \mathbb{S}_{2n}$ auf als Untergruppe der symmetrischen Gruppe auf $2n$ Elementen, so sei $G^+ = G \cap \mathbb{A}_{2n}$ die Menge der geraden Permutationen aus G. Mit anderen Worten ist

$$G^+ = \{(\mu(1), \ldots, \mu(n)) \mid \prod_{i=1}^{n} \mu(i) = 1\} \ .$$

Dann ist

$$G_n^+(N) := S/G^+ \ .$$

Bezeichnen wir mit $(\sigma, +)$ und $(\sigma, -)$ die Bilder von $(\sigma, (1, \ldots, 1))$ bzw. $(\sigma, (-1, 1, \ldots, 1))$ unter der Projektion $S \to G_n^+(N)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
[(\sigma,+) : (\sigma_l,+)] &= (-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^{n}(s_q-q)} \\
[(\sigma,+) : (\sigma_l,-)] &= -(-1)^{s'_1-1+s'_l-l+\sum_{q=l+1}^{n}(s_q-q)} \\
[(\sigma,-) : (\sigma_l,-)] &= (-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^{n}(s_q-q)} \\
[(\sigma,-) : (\sigma_l,+)] &= -(-1)^{s'_1-1+s'_l-l+\sum_{q=l+1}^{n}(s_q-q)}
\end{aligned}$$

wobei s'_i der i-te Eintrag in σ_l ist.

Literatur

[Whitehead] G. W. Whitehead: Elements of Homotopy Theory, Springer, Graduate Texts in Mathematics

[Wolf] J. A. Wolf: Spaces of Constant Curvature, McGraw-Hill, 1967