

STEILKURS ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

STEFAN BECHTLUFT-SACHS

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einführung	1
1.1. Kompakt erzeugte topologische Räume	1
1.2. Faktorisierungsprobleme	2
1.3. Einige grundlegende Konstruktionen	3
1.4. Die Fundamentalgruppe	4
1.5. Exakte Sequenzen von Homotopieklassen	5
2. Zellkomplexe	7
3. Homologie	9
3.1. Die Eilenberg-Steenrod Axiome	9
3.2. Einige einfache Folgerungen aus den Eilenberg-Steenrod Axiomen	11
3.3. Der Abbildungsgrad	13
3.4. Der zelluläre Kettenkomplex	14
3.5. Kohomologie mit Koeffizienten	17
3.6. Hindernistheorie	18
3.7. Die Homologie der Grassmann-Mannigfaltigkeiten	19
4. Spektalsequenzen	23
Die Leray-Serre-Spektralsequenz	25
Literatur	25

1. Einführung

1.1. **Kompakt erzeugte topologische Räume.** Die Objekte der Kategorie $\mathcal{K}$ der kompakt erzeugten Räume sind Hausdorffsche topologische Räume X , deren Topologie die Eigenschaft hat, daß eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A \cap K$ für jede kompakte Menge $K \subset X$ abgeschlossen ist. Die Morphismen dieser Kategorie sind die stetigen Abbildungen. Der Funktor $k : \mathcal{TOP} \rightarrow \mathcal{K}$ von der Kategorie $\mathcal{TOP}$ Hausdorffscher topologischer Räume in $\mathcal{K}$ sei für einen topologischen Raum X mit Topologie $\mathcal{T}$ definiert durch

$$(X, \mathcal{T}) \mapsto (X, \{A \subset X \mid A \cap K \in \mathcal{T} \text{ für alle bezüglich } \mathcal{T} \text{ kompakten } K \subset X\}) .$$

Dieser Funktor hat die Eigenschaften, daß

- (1) X und $k(X)$ diegleichen kompakten Teilmengen haben,
- (2) $id : k(X) \rightarrow X$ stetig und für $X \in \mathcal{K}$ homöomorph ist und
- (3) X und $k(X)$ dengleichen singulären Kettenkomplex, also auch gleiche Homologie, haben

Für $X, Y \in \mathcal{K}$ ist $F(X, Y) := \mathcal{K}(X, Y)$ die Menge der stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$. In $\mathcal{TOP}$ versteht man $F(X, Y)$ mit der kompakt-offenen Topologie. In dieser Topologie ist die Auswertung

$$\begin{aligned} F(X, Y) \times X &\rightarrow Y \\ (f, x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

nicht immer stetig und

$$\begin{aligned} F(X, Y) \times F(X, Z) &\rightarrow F(X, Y \times Z) \\ (f, g) &\mapsto (x \mapsto (f(x), g(x))) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} F(X, F(Y, Z)) &\rightarrow F(X \times Y, Z) \\ f &\mapsto ((x, y) \mapsto (f(x))(y)) \end{aligned}$$

nicht immer homöomorph. Der Vorteil von $\mathcal{K}$ ist, daß dies immer gilt, wenn man

$$F(X, Y) := k(\mathcal{TOP}(X, Y))$$

setzt. Wir bezeichnen mit $\mathcal{TOP}^2$ bzw $\mathcal{K}^2$ die Kategorien von Paaren und mit $\mathcal{HTOP}$ bzw. $\mathcal{HK}$ die jeweiligen Homotopiekategorien. Deren Objekte sind die von $\mathcal{TOP}$ bzw. $\mathcal{K}$. Morphismen sind die Homotopieklassen stetiger Abbildungen, also z.B.

$$\mathcal{HTOP}^2((X, A), (Y, B)) = \mathcal{TOP}((X, A), (Y, B)) / \sim$$

wobei $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotop sind, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : (I \times X, I \times A) \rightarrow (Y, B)$$

mit $H(i, x) = f_i(x)$ für alle $x \in X$ und $i = 1, 2$ gibt.

1.2. Faktorisierungsprobleme. Viele Fragen aus der Topologie lassen sich als Fortsetzungsproblem formulieren: Sei $i : A \subset X$ die Inklusion und $f : A \rightarrow Y$ eine Abbildung. Gibt es eine Abbildung $F : X \rightarrow Y$, die f fortsetzt, d.h. so, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ i \downarrow & \nearrow F & \\ X & & \end{array}$$

kommutiert? Dual dazu ist das Hochhebungsproblem: Sind $p : E \rightarrow B$ und $f : X \rightarrow B$ gegeben, so sucht man eine Abbildung $F : X \rightarrow E$, mit der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ F \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

kommutiert. Wir werden im folgenden nur das Fortsetzungsproblem behandeln. Um beispielsweise zu bestimmen, welche Homotopieklassen von Abbildungen des Torus $T = S^1 \times S^1$ in einen topologischen Raum Y existieren, betrachte den Torus als zusammengeklebt aus der Einpunktvereinigung zweier Kopien von S^1 mit einer zweidimensionalen Scheibe D^2 :

$$T = S^1 \vee S^1 \cup_f D^2.$$

Die Abbildungen $S^1 \vee S^1 \rightarrow Y$ kennt man in vielen Fällen. Man hat dann zu untersuchen, welche diese Abbildungen man auf den ganzen Torus fortsetzen kann und welche danach homotop werden.

Ist die Abbildung i (bzw. p) lokal hinreichend einfach, so hängt die Antwort auf diese beiden Fragen nur vom Homotopietyp der Abbildung f ab. Man nennt dann i eine Kofaserung:

Definition 1. $i : A \hookrightarrow X$ heißt Kofaserung, wenn A abgeschlossen in X ist und es zu jeder Abbildung $g : X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$ eine Abbildung $G : X \times I \rightarrow Y$ gibt, deren Einschränkung g ist, also so, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & \nearrow G & \\ X \times I & & \end{array}$$

kommutiert.

Das lokale Kriterium für die Kofaserungseigenschaft ist

Definition 2. $A \subset X$ ist ein Umgebungsdeformationsretrakt ('NDR'), wenn es eine Funktion $u : X \rightarrow I$ und eine Abbildung $h : X \times I \rightarrow X$ gibt mit

- (1) $A = u^{-1}(0)$,
- (2) $h(x, 0) = x$ für alle $x \in X$,
- (3) $h(a, t) = a$ für alle $a \in A$ und $t \in I$,
- (4) $h(x, 1) \in A$ für alle $x \in X$ mit $u(x) < 1$.

Beispiele von Umgebungsdeformationsretrakten sind $S^{n-1} \subset D^n$, abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten $U \subset M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Allgemein gilt

Satz 3. $A \subset X$ ist genau dann ein Umgebungsdeformationsretrakt, wenn $i : A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist.

1.3. Einige grundlegende Konstruktionen. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum X , so bezeichnen wir mit $X/\sim$ den Raum der Äquivalenzklassen. Die Quotiententopologie auf $X/\sim$ ist die feinste Topologie auf $X/\sim$ bezüglich der die Projektion $X \rightarrow X/\sim$ noch stetig ist. Offene Mengen in $X/\sim$ sind also genau diejenigen Teilmengen, deren Urbild offen in X ist. Eine Teilmenge $A \subset X$ definiert eine Äquivalenzrelation dadurch, daß man $x, y \in X$ genau dann identifiziert, wenn x und y Elemente von A sind. Den Quotienten bezeichnen wir einfach mit X/A . Mit $\mathcal{TOP}^*$ bzw. $\mathcal{K}^*$ bezeichnen wir im folgenden die Kategorien der wohlpunktierten (kompakt erzeugten)

topologischen Räume. Die Objekte dieser Kategorie sind (kompakt erzeugte) topologische Räume X in denen ein Basispunkt $x \in X$ ausgezeichnet ist, derart, daß die Inklusion $\{x\} \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist. Morphismen $f : X \rightarrow Y$ sind genau die stetigen Abbildungen, die Basispunkt auf Basispunkt abbilden, also mit $f(x) = y$, wenn x, y die Basispunkte in X bzw Y sind.

Der (reduzierte) Kegel über einem topologischen Raum X mit Basispunkt x ist der Raum

$$CX := (I \times X)/(\{1\} \times X \cup I \times \{x\}) .$$

Unter der (reduzierten) Suspension SX von X versteht man den Quotienten

$$SX := CX/(\{0\} \times X) = (I \times X)/(\{1\} \times X \cup \{0\} \times X \cup I \times \{x\}) .$$

SX ist homöomorph zu $CX \cup_{id_X} CX$. Dabei ist X als Teilraum $\{0\} \times X \subset CX$ aufgefaßt. Beispiel:

$$S^n = SS^{n-1} .$$

Übung: Für welche Mannigfaltigkeiten M ist SM wieder eine Mannigfaltigkeit ?

Die Einpunktvereinigung $X \vee Y$ zweier topologischer Räume X und Y mit Basispunkten x bzw. y ist definiert als

$$X \vee Y := X \dot{\cup} Y / \{x, y\} .$$

Sie läßt sich in natürlicher Weise mit dem Unterraum $X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y$ des kartesischen Produkts $X \times Y$ identifizieren. Den Quotienten

$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$$

dieser Inklusion nennt man das Smash-Produkt. Beispiel:

$$SX = S^1 \wedge X .$$

Die Einpunktvereinigung bzw. das Smash-Produkt sind die kategorielle Summe bzw. das kategorielle Produkt in $\mathcal{TOP}^*$ und $\mathcal{K}^*$.

1.4. Die Fundamentalgruppe. Für einen punktierten Raum (X, x) ist die Fundamentalgruppe definiert durch

$$\pi_1(X, x) := [(S^1, 1), (X, x)] .$$

Sind $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x)$ so ist die Komposition

$$S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X$$

ein Vertreter des Produktes $[\alpha] \cdot [\beta] \in \pi_1(X, x)$. Beispiele:

- (1) $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ [Spanier] S.54
- (2) $\pi_1(S^n, 1) = 0$ für $n > 1$.
- (3) $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Die Fundamentalgruppe eines Raumes Y mißt den Unterschied zwischen freien und punktierten Homotopieklassen von Abbildungen $X \rightarrow Y$.

Definition 4. Sind $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ und $u : I \rightarrow Y$ so sagen wir, f_0 sei frei homotop zu f_1 entlang u , wenn es eine Homotopie f_t mit $u(t) = f_t(x)$ gibt. Wir schreiben dann $f_0 \simeq_u f_1$.

Dann gilt

Satz 5. *Ist X wohlpunktiert, dann gibt es zu $f : X \rightarrow Y$ und $u : I \rightarrow Y$ mit $f(x) = u(0)$ eine Abbildung $g : X \rightarrow Y$ mit $f \simeq_u g$. Die Homotopieklasse von g relativ x ist durch die Homotopieklassen von f relativ x und von u relativ $\partial I = \{0, 1\}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: Da die Inklusion $\{x\} \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist, gibt es $F : X \times I \rightarrow Y$ mit

$$F|_{X \times \{0\} \cup \{x\} \times I} = f \cup u.$$

Dann hat $g : X \rightarrow Y$ mit $g(x) = F(x, 1)$ die gewünschte Eigenschaft. •

Wir definieren dadurch $\lambda(f, u) := [g]_{\text{rel } x}$ und eine Operation

$$(6) \quad \pi_1(X, x) \times [(X, x), (Y, y)] \rightarrow [(X, x), (Y, y)]$$

$$(7) \quad (u, f) \mapsto \lambda(f, u)$$

Satz 8. *Ist (X, x) ein wohlpunktierter Raum und Y zusammenhängend, so operiert $\pi_1(Y, y)$ auf $[(X, x), (Y, y)]$ und die von der Identität $F((X, x), (Y, y)) \rightarrow F(X, Y)$ induzierte Abbildung $[(X, x), (Y, y)] \rightarrow [X, Y]$ liefert eine Bijektion des Orbitraumes dieser Aktion auf $[X, Y]$.*

So ist z.B. $[S^1, \mathbb{R}P^2] \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2)/\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als Mengen, da die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nur trivial operieren kann.

1.5. Exakte Sequenzen von Homotopieklassen.

Definition 9. *Eine Sequenz*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

in $\mathcal{TOP}^$ heißt exakt, wenn*

$$[T, X] \xrightarrow{f_*} [T, Y] \xrightarrow{g_*} [T, Z]$$

und koexakt, wenn

$$[X, T] \xleftarrow{f^*} [Y, T] \xleftarrow{g^*} [Z, T]$$

für alle punktierten topologischen Räume T exakte Sequenzen punktierter Mengen sind. (Eine Sequenz

$$(M, m) \xrightarrow{f} (N, n) \xrightarrow{g} (P, p)$$

punktierter Mengen heißt exakt, wenn $g^{-1}(p) = f(M)$ ist.)

Ferner definieren wir Abbildungszylinder Zf und Abbildungskegel Cf einer punktierten Abbildung $f : X \rightarrow Y$ durch

$$Zf := Y \dot{\cup} X \times I / f(x) \simeq (x, 1)$$

und

$$Cf := Zf / X \times \{0\}.$$

In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß zu jeder stetigen Abbildung punktierter Räume eine (ko)exakte Folge von Mengen von Homotopieklassen gehört. Mit deren Hilfe kann man manchmal $[X, Y]$ bestimmen.

Satz 10. *Die Sequenz*

$$(11) \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Cf$$

in $\mathcal{K}^*$ ist koexakt für alle punktierten $f : X \rightarrow Y$.

Beweis: Sei T punktiert und

$$[X, T] \xleftarrow{f^*} [Y, T] \xleftarrow{i^*} [Cf, T] .$$

Da $i \circ f$ nullhomotop ist, gilt $f^* \circ i^* = *$. Ist $\phi : Y \rightarrow T$ mit $\phi \circ f \simeq *$ vermöge einer Homotopie $H : CX \rightarrow T$, so ist

$$\psi := H \vee f : CX \vee Y / \sim = Cf \rightarrow T$$

eine Abbildung mit $i^*\psi = \phi$. •

Die Sequenz (11) wird durch

$$Cf \rightarrow Cf/Y = SX$$

nach rechts fortgesetzt und

$$Y \xrightarrow{i} Cf \rightarrow SX$$

ist koexakt, da wir wegen $SX \simeq Ci$ Satz 10 anwenden können. Die Suspension der Sequenz (11) ist dann wieder koexakt:

Satz 12. *Der Suspensionsfunktork $S : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*$ ist koexakt, i.e. ist*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

koexakt, dann auch

$$SX \xrightarrow{Sf} SY \xrightarrow{Sg} SZ .$$

Beweis: In der Kategorie $\mathcal{K}^*$ ist die Abbildung $F(X, F(Y, Z)) \rightarrow F(X \vee Y, Z)$ des Exponentialgesetzes ein natürlicher Homöomorphismus. Speziell ist $F(SX, T) = F(X, \Omega T)$ und damit $[SX, T] = [X, \Omega T]$. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} [SX, T] & \leftarrow & [SY, T] & \leftarrow & [SZ, T] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [X, \Omega T] & \leftarrow & [Y, \Omega T] & \leftarrow & [Z, \Omega T] \end{array}$$

ist die untere Zeile nach Voraussetzung exakt, also auch die obere. •

Bezeichnen wir mit d die Komposition $Cf \rightarrow Cf/Y \simeq SX$ so erhalten wir zusammenfassend:

Satz 13. [Spanier] *S.369 Die Sequenz*

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Cf \xrightarrow{d} SX \xrightarrow{Sf} SY \xrightarrow{Si} SZ \xrightarrow{Sd} \dots \\ \dots &\xrightarrow{S^{n-1}i} S^{n-1}Cf \xrightarrow{S^{n-1}d} S^n X \xrightarrow{S^n f} S^n Y \xrightarrow{S^n i} S^n Cf \xrightarrow{S^n d} S^{n+1} X \xrightarrow{S^{n+1} f} \dots \end{aligned}$$

in $\mathcal{K}^*$ ist koexakt.

Bemerkung: In dieser Sequenz tragen ab dem 4. Term alle Mengen eine natürliche Gruppenstruktur, denn sie sind von der Gestalt $[SX, Y]$ und die Abbildung $S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1$, die auch die Gruppenstruktur der Fundamentalgruppe lieferte, induziert eine Abbildung

$$SX = S^1 \wedge X \rightarrow (S^1 \vee S^1) \wedge X = (S^1 \wedge X) \vee (S^1 \wedge X) .$$

Nach Satz 8 in [Spanier] S.43 sind ab dem 7. Term in der Sequenz alle Gruppen abelsch. Die Gruppe $[SX, T]$ operiert auf $[Cf, T]$ und der Quotient wird von i injektiv nach $[Y, T]$ abgebildet. Die Operation von $\phi \in [SX, T]$ auf $\alpha \in [Cf, T]$ ist

$$\phi(\alpha) : Cf \rightarrow SX \vee Cf \xrightarrow{\phi \vee \alpha} T .$$

Es gilt folgender

Satz 14. [Spanier] S.371

- (1) Für $\alpha, \beta \in [Cf, T]$ ist $i^*\alpha = i^*\beta$ genau dann, wenn es ein $\phi \in [SX, T]$ gibt mit $\phi(\alpha) = \beta$.
- (2) Für $\alpha, \beta \in [SX, T]$ ist $d^*\alpha = d^*\beta$ genau dann, wenn es ein $\phi \in [SY, T]$ gibt mit $\alpha = \beta + (S\alpha)^*\phi$.

Beispiel: Für $X = S^1 \vee S^1 \hookrightarrow Y = S^1 \times S^1$ lauten die ersten Terme dieser Sequenz

$$S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 \rightarrow S^2 \rightarrow S^2 \vee S^2 \rightarrow \dots .$$

Daher ist

$$\pi_1(T) \times \pi_1(T) \leftarrow [S^1 \times S^1, T] \leftarrow \pi_2(T) \leftarrow \pi_2(T) \times \pi_2(T) \leftarrow \dots$$

exakt.

2. Zellkomplexe

Wir folgen der Darstellung in [Whitehead] ferner auch [Spanier], [Dold]. Ein einfaches nicht-triviales Fortsetzungsproblem ist die Ausweitung einer Abbildung $f : S^n \rightarrow S^n$ auf den Ball D^{n+1} , was genau dann möglich ist, wenn eine ganzzahlige Homotopieinvariante von f , der Abbildungsgrad, verschwindet. Wir werden also Räume X betrachten, die aus A durch sukzessives Ankleben von Bällen D^{n+1} mittels Anklebeabbildungen $f : \partial D^{n+1} \rightarrow A$ entstehen, und aus den Abbildungsgraden der Anklebeabbildungen Fortsetzungshindernisse konstruieren.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ und $S^{n-1} := \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Ist J eine Menge, so definiere $\Delta_J^n := J \times D^n$ und $\dot{\Delta}_J^n := J \times S^{n-1} = \partial \Delta_J^n$, ${}^\circ \Delta_J^n := J \times {}^\circ D^n = {}^\circ \Delta_J^n$. Ferner schreibe $\Delta_i^n = \{i\} \times D^n$ für $i \in J$

Definition 1. Sei (X, A) ein Paar topologischer Räume.

- (1) Man nennt X eine n -zelluläre Erweiterung von A oder sagt X entsteht aus A durch Ankleben von n -Zellen, wenn es eine stetige Abbildung $f : \dot{\Delta}_J^n \rightarrow A$ und einen Homöomorphismus $h : A \cup_f \Delta_J^n \approx X$ gibt. Für $i \in J$ heißt $h({}^\circ \Delta_i^n) \subset X$

eine (offene) n -Zelle von X . f heißt Anklebeabbildung und h charakteristische Abbildung der Zellen Δ_j^n .

- (2) Ein (relativer) Zellkomplex ist ein Paar (X, A) zusammen mit einer Filtrierung $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ von X (der 'Zellzerlegung') mit $X_{-1} := A \subset X_0$, wobei X_n aus X_{n-1} durch Ankleben von n -Zellen entsteht. X_n heißt n -Skelett, die n -Zellen von (X_n, X_{n-1}) heißen n -Zellen von (X, A) .
- (3) Ferner werden wir im folgenden immer verlangen, dass unsere Zellkomplexe CW-Komplexe sind:
 - (a) („closure-finite“) Die Anklebeabbildung $f: \dot{\Delta}_i^{n+1} \rightarrow X_n$ trifft nur A und endlich viele Zellen von X .
 - (b) („weak topology“, automatisch) X trägt die schwache Topologie, d.h. eine Menge $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn $U \cap A$ und $U \cap \overline{h(\Delta_i^n)}$ für alle Zellen offen sind.

Eigenschaften:

- (1) $X_n \subset X$ ist eine Kofaserung.
- (2) X hat die schwache Topologie von $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n$.
- (3) Ist $K \subset X$ kompakt, so liegt K in der Vereinigung von A mit höchstens endlich vielen Zellen von (X, A) .
- (4) Für Zellkomplexe (X, A) und (Y, B) trägt $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ eine natürliche Zellzerlegung mit den Skeletten

$$Z_n = \bigcup_{i=0}^n X_i \times Y_{n-i}.$$

Beispiele:

- (1) Sei $T = S^1 \times S^1$ der Torus. Eine Zellzerlegung von T ist gegeben durch

$$T_0 = (1, 1), \quad T_1 = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1, \quad T_2 = T,$$

wobei die Anklebeabbildungen der beiden eindimensionalen Zellen die Abbildungen $\dot{\Delta}_1^1 = \{0, 1\} \rightarrow \{(1, 1)\}$ sind und die zweidimensionale Zelle mit $\dot{\Delta}^2 = S^1 \rightarrow T_1$ gegeben durch

$$S^1 = [0, 1]/\{0, 1\} \ni t \mapsto \begin{cases} (4t, 1) & : t \leq 1/4 \\ (1, 4t - 1) & : 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ (3 - 4t, 1) & : 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ (1, 4 - 4t) & : 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

angeklebt wird.

- (2) $X = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, $A = \{\}$ hat Zellzerlegungen
 - (a) $X_0 = \{e_1\}$, $X_i = X_0$ für $i < n$ und $X_n = S^n \approx X_0 \cup_f D^n$ mit $f: \partial D^n \rightarrow X_0$ die konstante Abbildung.
 - (b) $X_0 = \{e_1, -e_1\} = S^0$, $X_i = S^i \subset \mathbb{R}^{i+1}$ für $i \leq n$, mit $X_i = S^i \approx S^{i-1} \cup_f (D^i \cup D^i)$, wo $f|_{\partial D^i}$ der Homöomorphismus $\partial D^i = S^{i-1}$ ist.

- (3) $X = \mathbb{R}P^n = S^n / \sim$, wobei $x \sim -x$, hat eine Zellzerlegung mit $X_i = \mathbb{R}P^i = \mathbb{R}P^{i-1} \cup_f D^i$ mit $f : \partial D^i \approx S^{i-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{i-1}$
- (4) $X = \mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / S^1$ hat eine Zellzerlegung mit $X_{2i+1} = X_{2i} = \mathbb{C}P^i = \mathbb{C}P^{i-1} \cup_f D^{2i}$ mit $f : \partial D^{2i} \approx S^{2i-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{i-1}$

Die Morphismen der Kategorie der Zellkomplexe sind die zellulären Abbildungen.

Definition 2. Sind (X, A) und (Y, B) Zellkomplexe, so ist $h : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ zellulär, wenn $h(X_n) \subset Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

In der Homotopiekategorie ist dies aber keine Einschränkung, denn es gilt folgender

Satz 3. (Zelluläre Approximation) Sind (X, A) und (Y, B) Zellkomplexe und ist $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung, so ist f relativ A homotop zu einer zellulären Abbildung.

3. Homologie

3.1. Die Eilenberg-Steenrod Axiome. Eine Homologietheorie (Kohomologietheorie) ist ein kovarianter (kontravarianter) Funktor von der Kategorie der Paare topologischer Räume und stetigen Abbildungen in die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen mit Randoperator und Gruppenhomomorphismen d.h. einem Paar (X, A) werden graduierte abelsche Gruppen $H(X)$, $H(A)$, $H(X, A)$ und ein Gruppenhomomorphismus $\partial : H(X, A) \rightarrow H(A)$ vom Grad -1 (bzw. $\delta : H(A) \rightarrow H(X, A)$ vom Grad $+1$) zugeordnet, und für eine stetige Abbildung $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H(A) & & \\ f_* \downarrow & & \downarrow & f|_{A*} & \\ H(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H(B) & & \end{array}$$

(bzw.

$$\begin{array}{ccccc} H(X, A) & \xleftarrow{\delta} & H(A) & & \\ f_* \uparrow & & \uparrow & f|_{A*} & \\ H(Y, B) & \xleftarrow{\delta} & H(B) & & \end{array}$$

für Kohomologie).

Ferner sollen folgende Eigenschaften gelten (Eilenberg-Steenrod Axiome [Eilenberg-Steenrod], [Spanier] S.200 und S.240):

- (1) (Homotopieaxiom) Sind f und g homotope Abbildungen, so sind die von f bzw. g induzierten Gruppenhomomorphismen gleich.
- (2) (lange exakte Homologie-Sequenz) Die Sequenz

$$\dots H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \xrightarrow{\partial} 0$$

bzw. für Kohomologie

$$\dots H^n(A) \xleftarrow{i^*} H^n(X) \xleftarrow{j^*} H^n(X, A) \xleftarrow{\partial} H^{n-1}(A) \xleftarrow{i^*} \dots \xleftarrow{j^*} H^0(X, A) \xleftarrow{\delta} 0$$

ist exakt. Dabei sind $i : A \subset X$ und $j : X \rightarrow (X, A)$ die Inklusionen und i_* , j_* bzw. i^* , j^* die davon induzierten Homomorphismen der (Ko)-Homologiegruppen.

- (3) (Ausschneidung) Ist $U \subset A$ mit $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$ so induziert $(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus

$$H(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H(X, A)$$

(bzw. $H(X, A) \rightarrow H(X \setminus U, A \setminus U)$).

- (4) (Dimensionsaxiom)

$$H_q(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} : q = 0 \\ 0 : q \neq n \end{cases}.$$

Ersetzt man hier $\mathbb{Z}$ durch eine abelsche Gruppe R , so nennt man H eine (Ko)-Homologietheorie mit Koeffizienten R .

Zusätzlich wollen wir von einer Homologietheorie verlangen, daß sie dem wedge-Axiom genügt: Ist $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie topologischer Räume und bezeichnen $i_\mu : X_\mu \hookrightarrow X := \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ die Inklusionen, so soll die Familie $\{i_{\alpha*} : H(X_\alpha) \rightarrow H(X) \mid \alpha \in A\}$ einen Isomorphismus

$$\{i_{\alpha*}\}_{\alpha \in A} : \bigoplus_{\alpha \in A} H(X_\alpha) \rightarrow H\left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\right)$$

induzieren. Wenn A endlich ist, so folgt dieses Axiom aus den Eilenberg-Steenrod Axiomen. Wir werden hier keine Konstruktion einer Homologietheorie behandeln. Ein Beispiel einer solchen Homologietheorie liefert die z.B. in [Dold], [Spanier] beschriebene singuläre Homologie. Wir werden jedoch später sehen, daß diese Axiome eine Homologietheorie auf Zellkomplexen eindeutig bestimmen. Dazu braucht man das wedge-Axiom nur für Zellkomplexe mit unendlich vielen Zellen.

Für punktierte Räume verwendet man oft die reduzierte Homologie $\tilde{H}(X)$. Diese ist definiert als Kern der von $X \rightarrow *$ induzierten Abbildung in Homologie. Das wedge-Axiom lautet dann:

Ist $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie punktierter topologischer Räume und bezeichnen $i_\mu : X_\mu \hookrightarrow X := \bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ die Inklusionen, so soll die Familie $\{i_{\alpha*} : \tilde{H}(X_\alpha) \rightarrow \tilde{H}(X) \mid \alpha \in A\}$ einen Isomorphismus

$$\{i_{\alpha*}\}_{\alpha \in A} : \bigoplus_{\alpha \in A} \tilde{H}(X_\alpha) \rightarrow \tilde{H}\left(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha\right)$$

induzieren.

3.1.3. *Singuläre Homologie.* Man definiert den q -dimensionalen Standard-Simplex durch

$$\Delta^q := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \forall i\}$$

also als die konvexe Hülle der Standardbasis $\{e_0, \dots, e_n\}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ und Abbildungen

$$\begin{aligned} \epsilon_q^j : \Delta^{q-1} &\rightarrow \Delta^q \\ e_i &\mapsto \begin{cases} e_i & : i < j \\ e_{i+1} & : i \geq j \end{cases} \end{aligned}$$

durch konvexe Fortsetzung, weiter

$$S_q := \mathbb{Z}F(\Delta^q, X)$$

als die freie abelsche Gruppe erzeugt von den stetigen Abbildungen $\Delta^q \rightarrow X$ und

$$\partial_q : S_q \rightarrow S_{q-1}$$

durch

$$\sigma \mapsto \sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \circ \epsilon_q^j .$$

Der singuläre Kettenkomplex ist dann das Paar $(S(X) = \bigoplus_q S_q, \partial = \bigoplus_q \partial_q)$ und die q -te singuläre Homologiegruppe ist die Faktorgruppe

$$(4) \quad H_q^s(X) = \text{Kern } \partial_q / \text{Bild } \partial_{q+1} .$$

Dieser Funktor erfüllt die Eilenberg-Steenrod Axiome und das wedge Axiom. Kohomologie und Homologie mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe R erhält man, wenn man in 4 den Kettenkomplex

$$\leftarrow \text{Hom}(S_q, R) \xleftarrow{\text{Hom}(\partial, \text{id})} \text{Hom}(S_{q-1}, R) \leftarrow$$

bzw.

$$\rightarrow S_q \otimes R \xrightarrow{\partial \otimes \text{id}} S_{q-1} \otimes R \rightarrow$$

einsetzt.

3.2. Einige einfache Folgerungen aus den Eilenberg-Steenrod Axiomen. Sei (X, A) ein Paar topologischer Räume und $x \in A \subset X$ ein Punkt.

- (1) Die identische Abbildung induziert die identische Abbildung in Homologie.
- (2) Ist X ein zusammenhängender Zellkomplex, so induziert die Inklusion $i : \{x\} \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus $Z = H_0(\{x\}) \rightarrow H_0(X)$.
- (3) Ist X zusammenziehbar, so ist $H(X) \cong H(\{x\})$.
- (4) Ist $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung, so ist $H(X, A) \cong H(X/A, [A])$.
- (5) Der Funktor $\tilde{H}$ erfüllt die Eilenberg-Steenrod Axiome, wenn man im Dimensionsaxiom den Punkt $*$ durch $S^0 = \{-1, 1\}$ ersetzt. Das Bild von ∂ liegt im Kern der von $A \rightarrow *$ induzierten Abbildung in Homologie. Damit definiert ∂ einen 'reduzierten' Randoperator $\tilde{H}(X, A) := H(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}(A)$, der eine lange exakte Sequenz wie oben liefert.
- (6) Das wedge-Axiom für H ist äquivalent zum wedge-Axiom für die zugehörige reduzierte Homologie $\tilde{H}$.

(7) Die Komposition

$$\tilde{H}(X) \hookrightarrow H(X) \rightarrow \cong H(X, \{x\})$$

ist ein natürlicher Isomorphismus.

(8) (lange exakte Sequenz des Tripels) Ist (X, B, A) ein Tripel topologischer Räume (d.h. $A \subset B \subset X$), so ist die Sequenz

$$\dots H_n(B, A) \xrightarrow{i_*} H_n(X, A) \xrightarrow{j_*} H_n(X, B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(B, A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

exakt. Der Randoperator ∂ dieser Sequenz ist definiert als die Komposition des Randoperators der langen exakten Sequenz des Paares (X, B) mit der von der Inklusion $B \rightarrow (B, A)$ induzierten Abbildung in Homologie.

Im folgenden wollen wir die Homologie der Sphären aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen berechnen. Für die Suspension gilt allgemein:

Satz 5. *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$\tilde{H}_q(SX) \cong \tilde{H}_{q-1}(X) .$$

Seien dazu $S'X$ und $C'X$ die unreduzierte Suspension bzw. der unreduzierte Kegel über X also

$$S'X = (X \times I) / (X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$$

und

$$C'X = (X \times I) / (X \times \{1\}) .$$

Da wir mit wohlpunktierten Räumen arbeiten, spielt das für die Homologie keine Rolle, es ist also

$$\tilde{H}(SX) = \tilde{H}(S'X/I) = H(S'X, I) = \tilde{H}(S'X) .$$

Definiere $A_r \subset S'X$ für $r \in I$ als $\{[t, x] \mid t \leq r, x \in X\}$ und $b_i := [\{0\} \times X] \in S'X$ für $i = 0, 1$. Dann gibt es offensichtliche Homotopieäquivalenzen

$$(6) \quad C'X \simeq b_1 ,$$

$$(7) \quad (S'X, A_{1/2}) \simeq (S'X, b_0) ,$$

$$(8) \quad (S'X \setminus A_{1/4}, A_{1/2} \setminus A_{1/4}) \simeq (C'X, X) .$$

Betrachte nun die lange exakte Homologiesequenz des Paares $(C'X, X)$:

$$\tilde{H}_q(C'X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_q(C'X, X) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{q-1}(X) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{q-1}(C'X) .$$

Da $C'X$ zusammenziehbar ist, sind die beiden äußeren Gruppen trivial und aufgrund der Exaktheit der Sequenz ist der Randoperator in der Mitte ein Isomorphismus. Andererseits ist

$$\tilde{H}_q(S'X, b_0) \cong \tilde{H}_q(S'X, A_{1/2}) \cong \tilde{H}_q(S'X \setminus A_{1/4}, A_{1/2} \setminus A_{1/4}) \cong \tilde{H}_q(C'X, X) ,$$

wobei die beiden äußeren Isomorphismen von den Homotopieäquivalenzen (7) und (8) induziert sind, und der mittlere durch Ausschneidung von $A_{1/4}$ aus $(S'X, A_{1/2})$ entsteht.

•

Die Homologiegruppen der Sphären S^n sind also

Korollar 9.

$$H(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

3.3. Der Abbildungsgrad. Für Abbildungen $f : S^n \rightarrow S^n$ können wir damit eine ganzzahlige Homotopieinvariante definieren: Wähle einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$ ($= H_n(S^n)$, wenn $n > 0$) und definiere den Abbildungsgrad von f als

$$\text{grad } f := \phi^{-1} f \phi(1) .$$

Eigenschaften des Abbildungsgrades:

- (1) Sind f und g homotop, so ist $\text{grad } f = \text{grad } g$. Nach [Spanier] S. 398 gilt auch die Umkehrung.
- (2) Für $f, g : S^n \rightarrow S^n$ gilt $\text{grad } (f \circ g) = \text{grad } f \text{grad } g$.
- (3) $\text{grad } id = 1$.
- (4) Die Spiegelung $f : S^n \rightarrow S^n$, $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$ hat $\text{grad } f = -1$.
- (5) $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $z \mapsto z^k$ hat $\text{grad } f = k$
- (6) Ist $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal und invertierbar, so ist

$$\text{grad } A|_{S^n} = \text{sgn } \det A ,$$

denn jede invertierbare lineare Abbildung ist homotop zu einer orthogonalen Abbildung, die man als Komposition von Spiegelungen schreiben kann.

- (7) Die stereographische Projektion $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ liefert zu einer invertierbaren linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ wie oben eine stetige Abbildung $A : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$, deren Abbildungsgrad ebenfalls $\text{sgn } \det A$ ist.
- (8) Sei $\mu : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ die Einschnürung des Äquators, also in Koordinaten die Abbildung

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \\ \begin{cases} ((1 - 2x_{n+1}^2, 2x_{n+1}x_2, \dots, 2x_{n+1}x_n, 2x_{n+1}x_1)(1, 0, \dots, 0)) & : x_{n+1} \geq 0 \\ ((1, 0, \dots, 0), (1 - 2x_{n+1}^2, -2x_{n+1}x_2, \dots, -2x_{n+1}x_n, -2x_{n+1}x_1)) & : x_{n+1} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sind ferner $f, g : S^n \rightarrow S^n$, so hat die Komposition $S^n \xrightarrow{\mu} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} S^n$ den Abbildungsgrad

$$(10) \quad \text{grad } ((f \vee g) \circ \mu) = \text{grad } f + \text{grad } g .$$

Damit kann man den Abbildungsgrad durch Zählen der Urbilder mit Orientierungen bestimmen. (Für den Begriff der Orientierung auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit siehe z. B. [Bröcker-Jänich].)

Satz 11. Ist $f : S^n \rightarrow S^n$ stetig, $y \in S^n$ mit $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_l\}$ endlich, und ist f in Umgebungen U_i der x_i differenzierbar mit regulärem Differential, so ist der Abbildungsgrad

von f durch die Formel

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^l \text{sgn}(f, x_i)$$

gegeben, wobei

$$\text{sgn}(f, x_i) = \pm 1 ,$$

je nachdem ob das Differential df von f an der Stelle x_i eine orientierte Basis von $T_{x_i}S^n$ auf eine orientierte Basis von T_yS^n abbildet oder nicht. (für eine feste Orientierung von S^n .)

Beweisskizze (für Details siehe [Dold], S.66 ff): Approximiere f in der Nähe der Punkte x_i durch eine Abbildung, die in geeigneten Karten um diese Punkte linear ist. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es disjunkte Karten $g_i : D^n \rightarrow U_i$ und $h : D^n \rightarrow V$, V eine Umgebung von y , gibt so, daß $h^{-1} \circ f \circ g_i$ linear und gleich df_{x_i} ist. Diese Karten liefern Homöomorphismen $S^n \approx D^n/S^{n-1} \xrightarrow{g_i} S^n/(S^n \setminus U_i)$ und $S^n \approx D^n/S^{n-1} \xrightarrow{h} S^n/(S^n \setminus V)$ damit können wir f durch

$$S^n \rightarrow S^n/(S^n \setminus \bigcup_i U_i) \approx \bigvee_i S^n \xrightarrow{\bigvee_i f|_{U_i}} S^n \approx S^n/(S^n \setminus V) \leftarrow S^n$$

faktorisieren. Iteriertes Anwenden von (10) liefert dann die Behauptung. •

3.4. Der zelluläre Kettenkomplex. Ein Kettenkomplex (Γ, δ) ist eine graduierte abelsche Gruppe $\Gamma = \oplus \Gamma_n$ ('Kettengruppen') zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\delta = \oplus \delta_n$, $\delta_n : \Gamma_n \rightarrow \Gamma_{n-1}$ auf Γ vom Grad -1 , ('Differential'), mit der Eigenschaft, daß $\delta \circ \delta = 0$ ist. Die Homologie von (Γ, δ) ist die Faktorgruppe

$$H(\Gamma, \delta) := \text{Kern } \delta / \text{Bild } \delta .$$

Homologie ist also ein Maß dafür, wieweit die Sequenz

$$\cdots \Gamma_n \xrightarrow{\delta_n} \Gamma_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \Gamma_{n-2} \cdots$$

davon abweicht, exakt zu sein.

Hat man eine Zellzerlegung $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eines topologischen Paares (X, A) , so kann man $H(X, A)$ effektiv bestimmen. Dazu definieren wir einen Kettenkomplex, von dem wir zeigen werden, daß seine Homologie die Homologie von (X, A) ist.

Definition 12. Die zellulären Kettengruppen sind definiert als

$$\Gamma_n(X, A) := H_n(X_n, X_{n-1}) .$$

Das Differential

$$\delta_n : \Gamma_n(X, A) = H_n(X_n, X_{n-1}) \rightarrow \Gamma_{n-1}(X, A) = H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$$

sei der Randoperator der langen exakten Sequenz des Tripels (X_n, X_{n-1}, X_{n-2}) , i.e. die Komposition des Randoperators ∂ des Paares (X_n, X_{n-1}) mit dem von der Inklusion $j : X_{n-1} \rightarrow (X_{n-1}, X_{n-2})$ induzierten Homomorphismus j_* der Homologiegruppen:

$$\delta_n : H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X_{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) .$$

Dann gilt

Satz 13.

$$H(X, A) = H(\Gamma, \delta).$$

Für endliche Zellkomplexe folgt dieser Satz bereits aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen. Insbesondere zeigt er, daß eine Homologietheorie auf endlichen Zellkomplexen durch diese Axiome eindeutig bestimmt ist. Für unendliche Zellkomplexe verwendet man, daß für Homologietheorien, die dem wedge-Axiom genügen, zusätzlich gilt:

Satz 14. ([Switzer] , 7.5.3) Ist X ein Zellkomplex, $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X$ Unterkomplexe mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = X$ und bezeichnen $i_m^n : X_m \hookrightarrow X_n$ und $j_m : X_m \hookrightarrow X$ die Inklusionen, so ist $\{\tilde{H}(X_m), i_m^n, j_m\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ ein gerichtetes System mit $\limdir \tilde{H}(X_m) = \tilde{H}(X)$.

Mit dem folgenden Lemma zeigen wir Satz 13 dann für endlichdimensionale Zellkomplexe:

Lemma 15. ([Whitehead]) Für $p < q$ ist $H_p(X_q, A) \rightarrow H_p(X, A)$ isomorph und für $q = p$ ist

$$H_{p+1}(X_{p+1}, X_p) \rightarrow H_p(X_{p+1}, A) \rightarrow H_p(X, A) \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis des Lemmas: Betrachte die lange exakte Sequenz des Tripels (X, X_p, A) :

$$H_{p+1}(X, X_q) \xrightarrow{\partial} H_p(X_q, A) \rightarrow H_p(X, A) \rightarrow H_p(X, X_q) .$$

Zunächst gilt wegen $X_{q+1}/X_q \approx \bigvee_j S_j^{q+1}$, daß $H_p(X_{q+1}, X_q) = 0$, wenn $p \leq q$. Aus der langen exakten Sequenz

$$H_{p+1}(X_{q+i+1}, X_{q+i}) \rightarrow H_p(X_{q+i}, X_q) \rightarrow H_p(X_{q+i+1}, X_q) \rightarrow H_p(X_{q+i+1}, X_{q+i})$$

des Tripels $(X_{q+i+1}, X_{q+i}, X_q)$ folgt daraus per Induktion über i , daß $H_p(X_{q+i}, X_q) = 0$ für $p \leq q$, $i \geq 1$. Der direkte Limes in Satz 14 ist daher

$$H_p(X, X_q) = \limdir_{i \rightarrow \infty} H_p(X_{q+i}, X_q) = 0$$

und die Abbildung $H_p(X_q, A) \rightarrow H_p(X, A)$ ist isomorph für $p < q$ und surjektiv für $p = q$. Die lange exakte Sequenz

$$H_{p+2}(X, X_{p+1}) \rightarrow H_{p+1}(X_{p+1}, X_p) \rightarrow H_{p+1}(X, X_p) \rightarrow H_{p+1}(X, X_{p+1})$$

des Tripels (X, X_{p+1}, X_p) zeigt schließlich, daß $i : H_{p+1}(X_{p+1}, X_p) \rightarrow H_{p+1}(X, X_p)$ surjektiv und damit $\text{Bild}(\partial \circ i) = \text{Bild}(\partial) = \text{Kern}(H_p(X_p, A) \rightarrow H_p(X, A))$ ist.

Zum Beweis des Satzes betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & \rightarrow & H_n(X_n, A) & \rightarrow & H_n(X_n, X_{n-1}) & \rightarrow & H_{n-1}(X_{n-1}, A) \rightarrow H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\ & & \downarrow & & & & \\ & & H_n(X, A) & & & & \end{array}$$

([Whitehead] S. 63) •

Im folgenden werden wir zeigen, wie der Kettenkomplex $(\Gamma(X, A), \delta)$ aus den Daten des Zellkomplexes (X, A) berechnet wird. Dazu wählen wir für alle $n \in N$ einen Homöomorphismus $S^n \approx D^n/S^{n-1}$. Dies liefert insbesondere einen Isomorphismus $H_q(\Delta^q, \dot{\Delta}^q) \cong H_q(S^q)$. In dem folgenden kommutativen Diagramm bezeichnen $f_n : \dot{\Delta}^n \rightarrow X_{n-1}$ die Anklebeabbildungen und $F_n : \Delta^n/\dot{\Delta}^n \approx X_n/X_{n-1}$ die charakteristischen Abbildungen der n -Zellen von X :

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X_n, X_{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(X_{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\ \uparrow F_n & & \uparrow f_n & & \uparrow F_{n-1} \\ H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(\dot{\Delta}^n) & & H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \dot{\Delta}^{n-1}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \bigoplus_{j \in J_n} H_n(\Delta_j^n, \dot{\Delta}_j^n) & \xrightarrow{\oplus \partial_j} & \bigoplus_{j \in J_n} H_{n-1}(\dot{\Delta}_j^n) & & \bigoplus_{i \in J_{n-1}} H_{n-1}(\Delta_i^{n-1}, \dot{\Delta}_i^{n-1}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \text{Projektion auf den } l\text{-ten Faktor} \\ H_n(\Delta_k^n, \dot{\Delta}_k^n) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{n-1}(\dot{\Delta}_k^n) & & H_{n-1}(\Delta_l^{n-1}, \dot{\Delta}_l^{n-1}) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{[k, l]} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

Die n -te zelluläre Kettengruppe identifizieren wir mit der von den n -Zellen des Komplexes X erzeugten freien abelschen Gruppe. Die Matrix $(\delta_{j,i})_{j \in J_{n+1}, i \in J_n}$ des Differentials

$$\delta : \Gamma_{n+1}(X, A) = \bigoplus_{j \in J_{n+1}} \Delta_j^{n+1} \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma_n(X, A) = \bigoplus_{i \in J_n} \Delta_i^n \mathbb{Z}$$

in den durch die Zellen gegebenen Basen heißt Inzidenzmatrix. Ihre Einträge sind die Abbildungsgrade $[k, l]$ der Abbildungen

$$(16) \quad S^n \xrightarrow{f_k} X_n \rightarrow X_n/X_{n-1} \xleftarrow{h^n} \Delta_{J_n}^n/\dot{\Delta}_{J_n}^n \xrightarrow{p_l} \Delta_l^n/\dot{\Delta}_l^n \approx S^n.$$

Hier ist f_k die Anklebeabbildung der k -ten $n+1$ Zelle, h^n die von der charakteristischen Abbildung der n -Zellen induzierte Abbildung der Quotienten und p_l von der Quotientenabbildung $\Delta_{J_n}^n \rightarrow \Delta_{J_n}^n/((J_n \setminus \{l\}) \times D^n)$ induziert.

Beispiele:

- (1) Die Zellzerlegung des komplex-projektiven Raumes $\mathbb{C}P^n$ hat nur in geraden Dimensionen eine Zelle. Die Randoperatoren des zugehörigen zellulären Kettenkomplexes verschwinden also und wir erhalten

$$H_q(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & : q = 2k, k = 0 \dots n \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

- (2) Für den Torus erhalten wir den Kettenkomplex

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

also die Homologiegruppen

$$H_q(S^1 \times S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & : q = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & : q = 1 \\ 0 & : q > 2 \text{ oder } q < 0 \end{cases}$$

- (3) Für den reell-projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ haben wir eine Zellzerlegung mit jeweils einer Zelle in den Dimensionen $1 \dots n$. Die Abbildungsgrade der Anklebeabbildungen sind abwechselnd 0 und 2. Der Zelluläre Kettenkomplex lautet daher

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \dots \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

falls n gerade und

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

falls n ungerade ist. Die Homologie dieser Komplexe ist

$$H_q(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & : q = 0 \\ \mathbb{Z} & : q = n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & : 0 < q < n, q \text{ ungerade} \end{cases}$$

- (4) Aufgabe: Der zelluläre Kettenkomplex der „umständlichen“ Zellzerlegung von S^n lautet

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leftarrow \dots \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Bestimme die Randoperatoren.

3.5. Kohomologie mit Koeffizienten. Wir wollen hier kurz erklären, wie man die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten R aus der singulären Homologie berechnen kann. Der Einfachheit halber sei im folgenden R ein Hauptidealring. Viele der folgenden Tatsachen gelten auch für allgemeinere Klassen von Ringen (Für weitere Details siehe [Spanier] S. 219-248). Für einen Zellkomplex erhält man $H^*(X, R)$ als Homologie des Komplexes

$$\longrightarrow \text{Hom}(\Gamma^n(X), R) \longrightarrow \text{Hom}(\Gamma^{n+1}(X), R) \longrightarrow \dots$$

Die Paarung

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\Gamma^n(X), R) \otimes \Gamma^n(X) &\rightarrow R \\ \alpha \otimes a &\rightarrow \alpha(a) \end{aligned}$$

induziert eine von der Zellzerlegung von X unabhängige Paarung

$$H^n(X, R) \otimes H_n(X) \rightarrow R$$

also einen Homomorphismus $H^n(X, R) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), R)$. Damit gilt das folgende universelle Koeffiziententheorem für Kohomologie:

Satz 17. *Es gibt eine natürliche kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{q-1}, R) \rightarrow H^q(X, R) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), R) \rightarrow 0$$

die spaltet, i.e. es gibt einen Isomorphismus

$$H^q(X, R) \cong \text{Ext}(H_{q-1}, R) \oplus \text{Hom}(H_n(X), R) .$$

Dieser Isomorphismus ist aber nicht natürlich!

In diesem Satz bezeichnet Ext einen Funktor von der Kategorie der Paare abelscher Gruppen in die Kategorie der abelschen Gruppen, der wie folgt definiert ist: Sind A und B abelsche Gruppen, so sei

$$0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{r} C_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz mit freien abelschen Gruppen C_1 und C_0 . Eine solche Sequenz nennt man eine freie Auflösung von A . Dann rechnet man nach, daß die Sequenz $0 \rightarrow \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(C_0, B) \xrightarrow{\text{Hom}(r, \text{id})} \text{Hom}(C_1, B)$ exakt ist. $\text{Ext}(A, B)$ ist definiert als der Kokern von $\text{Hom}(r, \text{id})$, also so, daß die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(C_0, B) \xrightarrow{\text{Hom}(r, \text{id})} \text{Hom}(C_1, B) \rightarrow \text{Ext}(A, B) \rightarrow 0$$

exakt wird.

Ist A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe so schreiben wir $T(A)$ für die Torsionsuntergruppe und $F(A) = A/T(A)$. Dann gilt $A \cong F(A) \oplus T(A)$ und die Definition von Ext zeigt, daß

$$\text{Ext}(A, B) \cong T \otimes B .$$

Das universelle Koeffiziententheorem liefert daher für $R = \mathbb{Z}$ die Isomorphie

$$H^q(X, \mathbb{Z}) \cong T(H_{q-1}(X)) \oplus F(H_q(X)) .$$

3.6. Hindernistheorie. Sei (X, A) ein relativer Zellkomplex und $f : A \rightarrow Y$ stetig. Wir wollen versuchen, f nach und nach über die Skelette von X fortzusetzen. Sei also zunächst $f_{n-1} : X_{n-1} \rightarrow Y$ eine Fortsetzung von f auf das $(n-1)$ -Skelett von X . Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, daß die Fundamentalgruppe von Y trivial auf der $(n-1)$ -ten Homotopiegruppe $\pi_{n-1}(Y, y) := [(S^{n-1}, *), (Y, y)]$ operiert. Dann müssen wir uns um Basispunkte keine Gedanken machen. Insbesondere liefert eine beliebige Abbildung $S^{n-1} \rightarrow Y$ ein wohlbestimmtes Element von $\pi_{n-1}(Y, y)$. Ist $g : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ die Anklebeabbildung einer n Zelle von X , so ist f_{n-1} genau dann auf $X_{n-1} \cup_g \dot{\Delta}^n$ fortsetzbar, wenn $f_{n-1} \circ g : S^{n-1} \rightarrow Y$ nullhomotop ist, also wenn das $c^n(f) : g \mapsto [f_{n-1} \circ g] \in \pi_{n-1}(Y)$ verschwindet. $c^n(f)$ liefert also zu jeder n -Zelle g von X ein Element in $\pi_{n-1}(Y)$ und damit ein Element in $\Gamma(X, A, \pi_{n-1}(Y))$, das Hindernis-Kokette heißt. Für diese gilt ([Whitehead] S. 230ff) :

- (1) $f_{n-1} : X_{n-1} \rightarrow Y$ ist genau dann zu $f_n : X_n \rightarrow Y$ fortsetzbar, wenn $c^n(f) = 0$.
- (2) $c^n(f)$ ist ein Kozykel, repräsentiert also ein Element in der Kohomologiegruppe $H^n(X, A, \pi_{n-1}(Y))$.

Fundamental ist der folgende

Satz 18. *Sei $f : X_{n-1} \rightarrow Y$. Dann hat $f|_{X_{n-2}}$ eine Fortsetzung auf X_n , genau wenn die Kohomologieklassse von $c^n(f)$ also $[c^n(f)] \in H^n(X, A, \pi_{n-1}(Y))$ trivial ist.*

Beispiel: Mit der langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen ([Spanier] S. 377) der Faserung $S^1 \rightarrow S^{2q+1} \rightarrow \mathbb{C}P^q$ sieht man, daß die Homotopiegruppen des komplexprojektiven Raumes $\mathbb{C}P^q$ für $k \leq 2q$ durch

$$\pi_k(\mathbb{C}P^q) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq k \leq 2q, k \neq 2 \\ \mathbb{Z} & : k = 2 \end{cases}$$

gegeben sind. Insbesondere ist $\mathbb{C}P^q$ einfach-zusammenhängend und k -einfach für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $S^2 = \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^q$ die Inklusion des 2-Skeletts und $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^q$ irgendeine Abbildung, so zeigt Satz 18, daß f sich immer zu einer Abbildung $\mathbb{C}P^q \rightarrow \mathbb{C}P^q$ ausweiten läßt, denn das 3-Skelett von $\mathbb{C}P^q$ ist ebenfalls S^2 und die Kohomologiegruppen $H^k(\mathbb{C}P^q, \pi_{k-1}(\mathbb{C}P^q))$ sind für alle k trivial.

3.7. Die Homologie der Grassmann-Mannigfaltigkeiten. Die Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G_n(N)$ kann man sich vorstellen als Menge der n -dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^N$. Eine ausführliche Diskussion dieser Räume findet man z.B. in [Wolf], [Whitehead] S. 204. Betrachte die Untermannigfaltigkeit

$$\bar{S} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}^{N-n+i}, \langle a_i \mid a_j \rangle = \delta_{i,j}\}$$

von $S^{N-n} \times \dots \times S^{N-1}$. Auf $\bar{S}$ operiert die Gruppe $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{(\mu(1), \dots, \mu(n)) \mid \mu(i) = \pm 1\}$ durch

$$(\mu(1), \dots, \mu(n)) \times (a_1, \dots, a_n) \mapsto (\mu(1)a_1, \dots, \mu(n)a_n).$$

Für $a \in \mathbb{R}^N$ sei $\sigma(a) = \min \{q \in \mathbb{N} \mid a \in \mathbb{R}^q\}$ und für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \bar{S}$ schreiben wir $\sigma(a) = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$. Die Wirkung von G schränkt sich auf die Teilmenge

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) \in \bar{S} \mid 0 < \sigma(a_1) < \dots < \sigma(a_n) \leq N\}$$

ein. Der Quotient S/G ist die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_n(N)$.

Zunächst definieren wir eine G -invariante Zellzerlegung von S . Für $\sigma = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq N$ benutzen wir folgende Notation:

$$\begin{aligned} S_\sigma &:= \{(a_1, \dots, a_n) \in S \mid a_i \in \mathbb{R}^{s_i}\} \\ |\sigma| &:= \sum_{i=1}^n s_i - i \\ \sigma_l &:= (s_1, \dots, s_l - 1, \dots, s_n) \\ \mu_l &:= (\mu(1), \dots, \mu(l-1), -\mu(l), \mu(l+1), \dots, \mu(n)) \\ S_k &:= \bigcup_{|\sigma|=k} S_\sigma \\ e^{(\sigma, \mu)} &:= \{(a_1, \dots, a_n) \in S \mid a_i \in \mathbb{R}^{s_i}, \operatorname{sgn} \langle a_i \mid e_{s_i} \rangle = \mu(i)\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$S_\sigma = S_{\sigma_l} \cup \bigcup_{\mu \in G} e^{(\sigma, \mu)}$$

und

$$S_k = S_{k-1} \cup \bigcup_{\mu \in G, |\sigma|=k} e^{(\sigma, \mu)} .$$

Die Parametrisierung der Zellen. Abhängig von σ fassen wir die Standard- $|\sigma|$ -Zelle $D^{|\sigma|}$ auf als

$$\Delta^{|\sigma|} = D^{s_1} \times \dots \times D^{s_n}$$

und definieren vermöge dieser Identifikation eine Abbildung

$$(\sigma, \mu) : \Delta^{|\sigma|} \rightarrow S_\sigma$$

durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

mit

$$a_k = R_{\mu_{k-1}e_{s_{k-1}}}^{a_{k-1}} \dots R_{\mu_{(1)}e_{s_1}}^{a_1} F^\sigma x_k, \mu(k) \sqrt{1 - x_k^2} .$$

Dabei bildet

$$\begin{aligned} F^\sigma : \mathbb{R}^{s_k-k} &\rightarrow \mathbb{R}^{s_k-1} \\ (\xi_1 \dots \xi_{s_k-k}) &\mapsto (\xi_1 \dots \xi_{s_1-1}, 0, \xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_2-2}, 0, \dots, \xi_{s_k-k}) \end{aligned}$$

ab, d.h. die j -te Koordinate ist

$$(F^\sigma(\xi_1 \dots \xi_{s_k-k}))_j = \begin{cases} 0 & \text{wenn } j \in \sigma \\ \xi_{j-\#\{q|s_q < j, s_q \in \sigma\}} & \text{wenn } j \notin \sigma \end{cases}$$

Wenn $a_q = \mu(q)e_{s_q}$, so sei $R_{\mu(q)e_{s_q}}^{a_q} = id_{\mathbb{R}^{s_k}}$. Andernfalls sei $R_{\mu(q)e_{s_q}}^{a_q}$ die Drehung in der von a_q und e_{s_q} erzeugten Ebene des $\mathbb{R}^{s_k}$, die $\mu(q)e_{s_q}$ auf a_q dreht und auf dem orthogonalen Komplement dieser Ebene die Identität ist. (Diese Ebene ist dann wohldefiniert, da $\langle a_q | \mu(q)e_{s_q} \rangle \geq 0$.) Die Einschränkung von (σ, μ) auf den Rand

$$\partial \Delta^{|\sigma|} = \bigcup_{q=1}^n \partial_q D^{|\sigma|} ,$$

$$\partial_q \Delta^{|\sigma|} = D^{s_1-1} \times \dots \times D^{s_{q-1}-(q-1)} \times S^{s_q-q-1} \times D^{s_{q+1}-(q+1)} \times \dots \times D^{s_n-n}$$

der Standard- $|\sigma|$ -Zelle liefert die Anklebeabbildung. Wir erhalten

Satz 19. *Eine Zellzerlegung von S ist gegeben durch*

- (1) *Das k -Skelett von S ist S_k für $k = 0 \dots n(N-n)$.*
- (2) *S_k entsteht aus S_{k-1} durch Ankleben einer k -Zelle für jedes σ mit $|\sigma| = k$ durch $(\sigma, \mu) : \Delta^\sigma \rightarrow S_{k-1}$.*

Diese Zellzerlegung ist regulär, d.h. die Anklebeabbildungen sind Einbettungen.

Die Inzidenzmatrizen. Aufgrund der Regularität dieser Zellzerlegung sind die Abbildungsgrade in (16) und damit die Einträge der Inzidenzmatrizen gleich ± 1 . Um diese Einträge zu bestimmen, vergleichen wir die Parametrisierungen, die wir auf $e^{(\sigma_l, \mu')}$ erhalten, wenn wir die (σ, μ) auf $\partial_l \Delta^{|\sigma|}$ einschränken, mit der „direkten“ Parametrisierung durch (σ_l, μ') . Dabei kommen nur die Fälle $\mu' = \mu$ und $\mu' = \mu_l$ vor. Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ orientieren wir dabei so, daß eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von $T_x S^n$ genau dann orientiert ist, wenn $v_1, \dots, v_n, x$ und $e_1, \dots, e_{n+1}$ gleich orientiert sind. Die Parametrisierung

$$\chi_{\pm} : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{l-1}, (y_l, \pm \sqrt{1 - y_l^2}), y_{l+1}, \dots, y_n)$$

von $\partial_l \Delta^{|\sigma|}$ hat dann

$$\text{sgn}(\chi_{\pm}) = \pm (-1)^{\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)}.$$

Sei im folgenden $\nu = 1$, wenn $\mu' = \mu$ und $\nu = -1$, wenn $\mu' = \mu_l$.

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{(\sigma, \mu)} \left\{ \begin{array}{l} a_1 = F^{\sigma} x_1, \mu(1) \sqrt{1 - x_1^2} \\ \vdots \\ a_{l-1} = R_{\mu(l-2)e_{s_{l-2}}}^{a_{l-2}} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{a_1} F^{\sigma} x_{l-1}, \mu(l-1) \sqrt{1 - x_{l-1}^2} \\ a_l = R_{\mu(l-1)e_{s_{l-1}}}^{a_{l-1}} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{a_1} F^{\sigma} x_l, \mu(l) \sqrt{1 - x_l^2} \\ a_{l+1} = R_{\mu(l)e_{s_l}}^{a_l} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{a_1} F^{\sigma} x_{l+1}, \mu(l+1) \sqrt{1 - x_{l+1}^2} \\ \vdots \\ a_n = R_{\mu(n-1)e_{s_{n-1}}}^{a_{n-1}} \cdots R_{\mu(l)e_{s_l}}^{a_l} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{a_1} F^{\sigma} x_n, \mu(n) \sqrt{1 - x_n^2} \end{array} \right. \\ \uparrow \chi_{\nu \mu(l)} & \\ (y_1, \dots, y_n) & \xrightarrow{(\sigma_l, \mu')} \left\{ \begin{array}{l} b_1 = F^{\sigma_l} y_1, \mu(1) \sqrt{1 - y_1^2} \\ \vdots \\ b_{l-1} = R_{\mu(l-2)e_{s_{l-2}}}^{b_{l-2}} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{b_1} F^{\sigma_l} y_{l-1}, \mu(l-1) \sqrt{1 - y_{l-1}^2} \\ b_l = R_{\mu(l-1)e_{s_{l-1}}}^{b_{l-1}} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{b_1} F^{\sigma_l} y_l, \nu \mu(l) \sqrt{1 - y_l^2} \\ b_{l+1} = R_{\nu \mu(l)e_{s_{l+1}}}^{b_l} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{b_1} F^{\sigma_l} y_{l+1}, \mu(l+1) \sqrt{1 - y_{l+1}^2} \\ \vdots \\ b_n = R_{\mu(n-1)e_{s_{n-1}}}^{b_{n-1}} \cdots R_{\nu \mu(l)e_{s_{l+1}}}^{b_l} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{b_1} F^{\sigma_l} y_n, \mu(n) \sqrt{1 - y_n^2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Die Inzidenzzahl $[(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu')]$ ist dann der Grad von

$$(\sigma_l, \mu')^{-1} \circ (\sigma, \mu) \circ \chi_{\nu \mu(l)}(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y'_1, \dots, y'_n),$$

wobei

$$y'_j = y_j$$

für $j \leq l$. Für $j > l$ ist

$$\begin{aligned} y'_j &= (R_{\mu(j-1)e_{s_{j-1}}}^{a_{j-1}} \cdots R_{\nu\mu(l)e_{s_{l-1}}}^{a_l} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{a_1} F^{\sigma_l})^{-1} \times \\ &\quad R_{\mu(j-1)e_{s_{j-1}}}^{a_{j-1}} \cdots R_{\mu(l)e_{s_l}}^{a_l} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{a_1} F^\sigma y_{l+j}, \mu(j) \sqrt{1 - y_{l+j}^2} \\ &= (R_{\mu(l-1)e_{s_{l-1}}}^{a_{l-1}} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{a_1} F^\sigma)^{-1} (R_{\nu\mu(l)e_{s_{l-1}}}^{a_l})^{-1} R_{\mu(l)e_{s_l}}^{a_l} \cdots R_{\mu(1)e_{s_1}}^{a_1} F^\sigma y_j, \mu(j) \sqrt{1 - y_j^2}. \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} [(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu)] &= \mu(l)(-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)} \\ [(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu_l)] &= -\mu(l)(-1)^{\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)} \end{aligned}$$

Um den Kettenkomplex von $G_n(N)$ zu bestimmen, brauchen wir noch die Operation von G . Bezeichnen wir mit $\pi : S \rightarrow G_n(N)$ die Quotientenabbildung und τ_l die Punktspiegelung des l -ten Vektors, also

$$\tau_l : (a_1, \dots, a_{l-1}, a_l, a_{l+1}, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_{l-1}, -a_l, a_{l+1}, \dots, a_n)$$

so erhalten wir

$$\tau_l(\sigma, \mu) = (-1)^{s_l - l}(\sigma, \mu_l) .$$

und können die Zelle (σ) von $G_n(N)$ so orientieren, daß $\pi(\sigma, (1, \dots, 1)) = \sigma$. Damit folgt mit $\mu = (1, \dots, 1)$ aus der Äquvarianz der Zellzerlegung von S unter der Wirkung von G , daß

$$\begin{aligned} \partial(\sigma) &= \partial\pi(\sigma, \mu) = \pi\partial((\sigma, \mu)) \\ &= \pi([(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu)](\sigma_l, \mu) + [(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu_l)](\sigma_l, \mu_l) + \mathcal{R}) \\ &= ([(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu)]\pi(\sigma_l, \mu) + [(\sigma, \mu) : (\sigma_l, \mu_l)]\pi(\sigma_l, \mu_l) + \mathcal{R}) \\ &= (-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)}(\sigma_l) + -(-1)^{\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)}(-1)^{s_l - 1 - l}(\sigma_l) + \mathcal{R} \\ &= ((-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)} - (-1)^{\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)}(-1)^{s_l - 1 - l})(\sigma) + \mathcal{R} , \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{R}$ den Beitrag von Zellen bezeichnet, die unter π nicht auf (σ) abgebildet werden. Die Inzidenzzahl in $G_n(N)$ ist also

$$[(\sigma) : (\sigma_l)] = (-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)}(1 + (-1)^{s_l - n}) .$$

Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ergeben sich daraus unmittelbar: Die Inzidenzzahl $[(\sigma) : (\sigma_l)]$ ist immer gleich 0 modulo 2 und damit sind die zellulären Kettengruppen schon die Homologiegruppen. Wir erhalten also

Satz 20. *Die Homologie der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_n(N)$ mit Koeffizienten $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist*

$$H_q(G_n(N), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\{(s_1, \dots, s_n) \mid 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq N, \sum_{i=1}^n s_i - i = q\} .$$

Schließlich geben wir noch die Inzidenzzahlen für die orientierte Gassmann-Mannigfaltigkeit

$$G_n^+(N) := \{(V, \mathcal{O}) \mid V \subset \mathbb{R}^N \text{ Untervektorraum, } \dim V = n, \mathcal{O} \text{ eine Orientierung auf } V\}$$

an. Fassen wir $G \subset \mathbb{S}_{2n}$ auf als Untergruppe der symmetrischen Gruppe auf $2n$ Elementen, so sei $G^+ = G \cap \mathbb{A}_{2n}$ die Menge der geraden Permutationen aus G . Mit anderen Worten ist

$$G^+ = \{(\mu(1), \dots, \mu(n)) \mid \prod_{i=1}^n \mu(i) = 1\}.$$

Dann ist

$$G_n^+(N) := S/G^+.$$

Bezeichnen wir mit $(\sigma, +)$ und $(\sigma, -)$ die Bilder von $(\sigma, (1, \dots, 1))$ bzw. $(\sigma, (-1, 1, \dots, 1))$ unter der Projektion $S \rightarrow G_n^+(N)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} [(\sigma, +) : (\sigma_l, +)] &= (-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)} \\ [(\sigma, +) : (\sigma_l, -)] &= -(-1)^{s'_1 - 1 + s'_l - l + \sum_{q=l+1}^n (s_q - q)} \\ [(\sigma, -) : (\sigma_l, -)] &= (-1)^{n-l+\sum_{q=l+1}^n (s_q - q)} \\ [(\sigma, -) : (\sigma_l, +)] &= -(-1)^{s'_1 - 1 + s'_l - l + \sum_{q=l+1}^n (s_q - q)} \end{aligned}$$

wobei s'_i der i -te Eintrag in σ_l ist.

4. Spektalsequenzen

Ein kommutatives Diagramm abelscher Gruppen

$$\mathcal{P} : \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ \partial \searrow & & \nearrow j \\ & E & \end{array}$$

nennt man ein exaktes Paar, wenn die Sequenz

$$D \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\partial} D \xrightarrow{i} D$$

exakt ist.

Die Ableitung eines solchen exakten Paares ist das exakte Paar

$$\mathcal{P}' : \begin{array}{ccc} D' = \text{Bild } i & \xrightarrow{i'} & D' \\ \partial' \searrow & & \nearrow j' \\ & E' & = \text{Kern } (j \circ \partial) / \text{Bild } (j \circ \partial) \end{array}$$

wobei ∂' und i' die Einschränkungen von ∂ bzw. i sind und j' die Komposition

$$j' : \text{Bild } i \cong D / \text{Kern } i \xrightarrow{j} \text{Kern } (j \circ \partial) / \text{Bild } (j \circ \partial)$$

ist. Also ist E' die Homologie des Kettenkomplexes

$$\longrightarrow E \xrightarrow{\partial \circ j} E \longrightarrow .$$

Die zu dem exakten Paar gehörende Spektralsequenz ist dann die Folge der Ableitungen $\mathcal{P}^k = (\mathcal{P}^{k-1})'$ von $\mathcal{P}$. Wir schreiben E^k für die entsprechende abelsche Gruppe im exakten Paar $\mathcal{P}^k$.

Ist $\mathcal{C} : \cdots \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \cdots$ ein filtrierter Kettenkomplex, dessen p -te Filtrierung wir mit $F^p\mathcal{C}$ bezeichnen,

$$\begin{array}{ccccc} & \cup & & \cup & \\ \rightarrow & F^p C_k & \rightarrow & F^p C_{k-1} & \rightarrow \\ & \cup & & \cup & \\ \rightarrow & F^{p-1} C_k & \rightarrow & F^{p-1} C_{k-1} & \rightarrow \\ & \cup & & \cup & \end{array}$$

so erhalten wir ein exaktes Paar durch

$$\begin{aligned} D_{p,q} &:= H_{p+q}(F^p\mathcal{C}) \\ E_{p,q} &:= H_{p+q}(F^p\mathcal{C}/F^{p-1}\mathcal{C}) \end{aligned}$$

Die Abbildungen i , j und ∂ erhalten wir aus der langen exakten Homologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz

$$F^p\mathcal{C} \hookrightarrow F^{p+1}\mathcal{C} \longrightarrow F^{p+1}\mathcal{C}/F^p\mathcal{C}$$

der Kettenkomplexe, also aus

$$\begin{aligned} \rightarrow D_{p,q} = H_{p+q}(F^p\mathcal{C}) &\xrightarrow{i} D_{p+1,q-1} = H_{p+q}(F^{p+1}\mathcal{C}) \xrightarrow{j} \\ E_{p+1,q-1} = H_{p+q}(F^{p+1}\mathcal{C}/F^p\mathcal{C}) &\xrightarrow{\partial} D_{p-1,q} = H_{p-1+q}(F^p\mathcal{C}) \end{aligned}$$

Man sagt, der Kettenkomplex $\mathcal{C}$ ist beschränkt filtriert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{Z}$ Elemente $r, s \in \mathbb{Z}$ gibt mit $F^r C_k = 0$ für alle $r < s$ und $F^r C_k = C_k$ für alle $r > s$.

Satz 21. *Ist $\mathcal{C}$ beschränkt filtriert, so konvergiert die Spektralsequenz, i.e. für alle p, q gibt es $r_0(p, q)$ so daß für alle $r \geq r_0(p, q)$ gilt $E_{p,q}^r = E_{p,q}^{r_0(p,q)}$. Diese Gruppe bezeichnet man mit $E_{p,q}^\infty$. Setzt man*

$$\Phi^p H_n = \text{Bild}(H_n(F^p\mathcal{C}) \rightarrow H_n(\mathcal{C})) ,$$

so gilt

$$E_{p,q}^\infty = \Phi^p H_{p+q} / \Phi^{p-1} H_{p+q} .$$

Hat man also E^∞ bestimmt, so muss man noch ein Erweiterungsproblem lösen. Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß man oft E^∞ einer Spektralsequenz bestimmen kann, indem man die Natürlichkeit ausnutzt und mit bekannten Situationen vergleicht. Es gilt folgender

Satz 22. *Ist $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Homomorphismus filtrierter Kettenkomplexe i.e. $f(F^p\mathcal{C}_k \subset F^p\mathcal{D}_k$ und ist für ein r_0 die von f induzierte Abbildung $E^{r_0}(\mathcal{C}) \rightarrow E^{r_0}(\mathcal{D})$ ein Isomorphismus, so induziert f für alle $r > r_0$ Isomorphismen $E^r(\mathcal{C}) \rightarrow E^r(\mathcal{D})$. Konvergieren die Spektralsequenzen so liefert f dann auch einen Isomorphismus $E^\infty(\mathcal{C}) \rightarrow E^\infty(\mathcal{D})$.*

Die Leray-Serre-Spektralsequenz. Die wohl wichtigste Anwendung finden Spektralsequenzen bei der Berechnung der Homologie von Faserungen. Sei B ein Zellkomplex und $\pi : E \rightarrow B$ eine zelluläre Faserung. Dann ist $E(p) = \pi^{-1}(B_p) \subset E$ ein Unterkomplex (nicht zu verwechseln mit dem p -Skelett von E). Der zelluläre Kettenkomplex von E erhält so eine Filtrierung

$$F^p \Gamma_k(E) = H_k(E(p)_k, E(p)_{k-1}) .$$

Wenden wir darauf die oben beschriebene Prozedur an, so erhalten wir eine Spektralsequenz mit E^1 -Term

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(F^p/F^{p-1}) \cong \Gamma_p(B, H_q(F)) \xrightarrow{d^1} E_{p-1,q}^1,$$

deren d^1 -Differential das Differential des zellulären Kettenkomplexes von B mit Koeffizienten in $H_q(F)$ ist. Der E^2 -Term ist also

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, H_q(F)) .$$

Allgemein gilt folgender Satz, auch ohne die eingangs gemachte Voraussetzung, daß E ein Zellkomplex sei:

Satz 23. (*Leray-Serre Spektralsequenz*, [Spanier] S.481) *Sei $F \rightarrow E \rightarrow B$ eine Faserung mit wegzusammenhängender Faser und trivialer Operation der Fundamentalgruppe von B auf der Homologie von F . Dann gibt es eine konvergente Spektralsequenz mit*

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, H_q(F))$$

und eine Filtrierung Φ von $H_(E)$ mit*

$$\Phi^p H_{p+q}(E) / \Phi^{p-1} H_{p+q} = E_{p,q}^\infty .$$

Diese Spektralsequenz ist natürlich unter fasertreuen Abbildungen.

Literatur

- [Whitehead] G. W. Whitehead: Elements of Homotopy Theory, Springer, Graduate Texts in Mathematics
- [Eilenberg-Steenrod] S. Eilenberg, N. Steenrod: Foundations of algebraic topology, Princeton Mathematical Series 15, Princeton University Press 1952
- [Bröcker-Jänich] T. Bröcker, K. Jänich: Einführung in die Differentialtopologie, Springer
- [Dold] A. Dold: Lectures on Algebraic Topology, Springer, 1972
- [Hatcher] Allen Hatcher: Algebraic Topology, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/#ATI>
- [Switzer] R. M. Switzer: Algebraic Topology - Homotopy and Homology, Grundlehren, Band 212, Springer, 1975
- [Spanier] E. H. Spanier: Algebraic Topology, Springer, 1975
- [Wolf] J. A. Wolf: Spaces of Constant Curvature, McGraw-Hill, 1967