SCRUDU ARDTEISTIMEIREACHTA, 1979

MATAMAITIC - ARDLEIBHÉAL - PÁIPÉAR II (300 marc)

DÉ CÉADAOIN, 13 MEITHEAMH - MAIDIN 9.30 go dti 12.00

CEIST 1 (100 marc) agus **CEITHRE** cheist eile (50 marc an ceann) a dhéanamh

1. (i) Léirigh ar léaráid Argand lócas z sa chaoi go bhfuil
$$|z + 3i| = |z - 3|.$$

(ii) Cuirtear £100 ar ús iolraithe 15% sa bhliain ag tosach gach bliana ar feadh 10 mbliana as a chéile. Réalaigh an t-iomlán sa bhfoirm $k(q^n - 1)$ bliain amháin tar éis an £100 deireannach a chur ar ús.

(iii) Tá suim an chéad 21 téarma de shraith chomhbhreise cothrom le náid. Réalaigh i dtéarmaí a (i.e. an chéad téarma den sraith) suim an chéad 21 téarma eile den sraith.

(iv) Tarraing stracgraf den chuar $y^2 = \dfrac{x}{1-x}$, ag glacadh leis go bhfuil an ais-y ina tadhlaí don chuar.

(v) Tá an ga, r, de chiorcal ag méadú faoin ráta 3·5 cm/soicind. Faigh i dtéarmaí π an ráta faoin a bhfuil an t-achar ag méadú nuair $r = 3\frac{1}{7}$ cm.

(vi) Más $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ an n-ú téarma de sheicheamh, faigh íosluach k gur dá réir atá $u_n \leqslant k$ le haghaidh gach n. An bhfuil íosluach ag k gur dá réir atá $u_n < k$ le haghaidh gach n. Cuir fáth le do fhreagra.

(vii) Faigh $\displaystyle\int \sin^2(2x+1)\,dx + \int \cos^2(2x+1)\,dx$.

(viii) Tástáil le haghaidh inréimneachais an tsraith $\quad 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{n\sqrt{n}} + \cdots$

(ix) Biodh $x_{r+1} = x_r(2 - 4x_r)$, $r = 1, 2, 3, \cdots$. Má tá $x_1 = 0{\cdot}2$, faigh x_2 agus x_3.

(x) Más inmhapa líneach é f, cruthaigh gur comhthreomharán é na pointí a réalaíonn $f(\vec{o})$, $f(\vec{a})$, $f(\vec{b})$, $f(\vec{a} + \vec{b})$, áit gurb é o an bunphointe.

Nó (x) Is é $\bar{x}$ an meán agus is é σ an diall caighdeánach de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Faigh an meán de
$$\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}, \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}, \frac{x_3 - \bar{x}}{\sigma}, \ldots, \frac{x_n - \bar{x}}{\sigma}.$$

2. (a) Más uimhreacha coimpléascacha iad $z_1 = x_1 + iy_1$ agus $z_2 = x_2 + iy_2$ agus má chiallaíonn rd z an chuid réadach de z, cruthaigh
$$z_1.\bar{z}_2 + \bar{z}_1.z_2 = 2\,\text{rd}\,z_1.\bar{z}_2$$
agus léaraigh ar léaráid rd $z \leqslant |z|$.

(b) Más $1, z_1, z_2, z_3$ fréamhacha $z^4 - 1 = 0$, ríomh $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3)$.

(c) Faigh íomhá na líne $|z - 1| = |z - i|$ faoin inmhapa $z \to i\bar{z}$.

3. Bain úsáid as ionduchtú chun a chruthú go bhfuil
$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{le haghaidh gach } n > 2 \text{ áit a bhfuil } n \in \mathbf{N}.$$
Is é $2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ an n-ú téarma de sheicheamh. Cruthaigh go bhfuil an seicheamh ag méadú.

Taispeáin go bhfuil
$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
níos lú ná 3 le haghaidh gach n agus nach mó ná 3 suim na sraithe
$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

4. (a) Difreálaigh an fheidhm $x \to \sin x$ ó bhunphrionsabail.

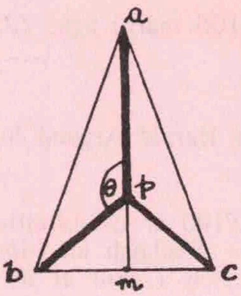
(b) (i) Faigh díorthaíoch $x\sqrt{9 - x^2}$ agus scríobh do fhreagra sa bhfoirm $\dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$.

(ii) Faigh claonadh an tadhlaí ag an phointe (1, 1) don chuar

$$y = e^{\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)}$$

(c) Má tá $x = \cos t + t\sin t$ agus $y = \sin t - t\cos t$, faigh $\dfrac{dy}{dx}$ i dtéarmaí t.

5. Triantán comhchosach is ea abc, mar atá san léaráid, sa chaoi go bhfuil $|ab| = |ac|$ agus $am \perp bc$. Bíodh $|bm| = k$ agus $|am| = h$. Pointe ar bit in $[am]$ is ea p agus tá $|\angle apb| = \theta = |\angle apc|$.

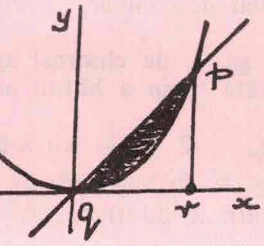


Réalaigh $|pb|$ agus $|pc|$ i dtéarmaí k agus θ.
Réalaigh $|pa|$ i dtéarmaí k, θ, h.

Uaidh sin faigh íosluach $|pa| + |pb| + |pc|$ i dtéarmaí k agus h. Fíoraigh go bhfuil an t-íosluach seo níos lú ná $|ma| + |mb| + |mc|$.

6. (a) Ríomh (i) $\displaystyle\int_0^1 x^{2\frac{1}{2}}(\sqrt{x} + 7)dx$ (ii) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ (iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta \; d\theta}{\sin^2\theta + 4\sin\theta + 5}$

(b) Bíodh A_n achar an réigiúin sa chéad cheathramhán atá iata ag na graif $y = x$ agus $y = x^{2n}$, $n \in \mathbf{N}_0$, mar atá sa léaráid.



Cruthaigh $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ = achar an Δpqr áit a bhfuil $pr \perp qr$.

7. (a) $\dfrac{n^2 + 3n + 6}{3n^2 + 5}$ is ea an n-ú téarma de sheicheamh. Cruthaigh go bhfuil an seicheamh inréimnneach agus iniúchaigh an bhfuil an tsraith $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 6}{3n^2 + 5}$ inréimneach freisin.

(b) Tástáil le haghaidh inréimneachais an tsraith $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} = \frac{1}{x^2 + 1^2} + \frac{1}{x^2 + 2^2} + \cdots$

(c) Tástáil le haghaidh inréimneachais nó le haghaidh eisréimneachais an tsraith

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + 1)x^n}{(n + 2)(n + 3)} \quad \text{le haghaidh} \quad x > 0.$$

8. (a) Más teagmhais chomheisiatacha iad T agus F, cruthaigh

$$D(T \cup F) = D(T) + D(F)$$

áit a chiallaíonn $D(X)$ dóchúlacht an teagmhais X .

(b) Athróga ar corr iad x agus z go bhfuil dáileadh normalach ag gach ceann díobh. Is iad $\bar{x}$ agus 0 na meáin de x agus z, faoi seach, agus is iad σ agus 1 na diallta caighdeánacha de x agus z, faoi seach. Scríobh síos coibhneas idir z agus x, $\bar{x}$, σ.
Déanamh ar leith de charr téann sé 60 km, ar mhéan, in aghaidh galúin amháin artola agus is é 10 km an diall caighdeánach. Toghtar carr amháin ar corr as líon mór den déanamh céanna. Faigh an dóchúlacht go dtéann an carr sin idir 50 agus 70 km in aghaidh galúin amháin artola.

(c) Bata gloine atá aonad amháin ar fhad, titeann sé agus briseann sé i dtrí phíosa gur faid dóibh $x, y, 1 - (x + y)$. Léirigh ar léaráid na pointí go léir (x, y) a shásaíonn an éagothroime $x + y < 1$ agus faigh an dóchúlacht go gcumtar triantán leis na trí phíosa.

Nó 8. (a) Má tá $\vec{x} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ agus $\vec{y} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$ agus $\vec{z} = |\vec{y}|\,\vec{x} + |\vec{x}|\,\vec{y}$, fíoraigh go bhfuil z ar chomhroinnteoir na $\angle xoy$, áit gurb é o an bunphointe.

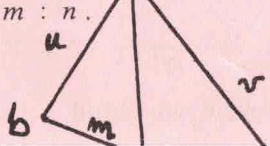
(b) Más pointe é r ar an líne pq, cruthaigh

$$\vec{r} = t\vec{q} + (1 - t)\vec{p} \quad \text{le haghaidh} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Tarraing as sin go bhfuil $\vec{r} = \dfrac{m\vec{q} + n\vec{p}}{m + n}$,

má roinneann r an mhírlíne $[pq]$ go hinmheánach sa choibhneas $m : n$.

Sa Δabc tá $|ab| = u$ agus $|ac| = v$ agus comhroinneann ar an $\angle bac$.



Ag glacadh le a mar bhunphointe, réalaigh $\vec{r}$.