

MATAMAITIC-ARDLEIBHÉAL-PÁIPÉAR I (300 marc)

DÉ LUAIN, 11 MEITHEAMH-MAIDIN, 9.30 go dtí 12.00

CEIST 1 (100 marc) agus CEITHRE cheist eile (50 marc an ceann) a dhéanamh

1. (i) Taispeáin go bhfuil gach réiteach
- x, y, z
- de na comhchothromóidí

$$\begin{aligned}x + y - 2z &= 9 \\ 2x + y - 3z &= 15\end{aligned}$$

ina sheicheamh chomhbhreise agus faigh réiteach amháin díobh.

- (ii) Cé mhéad uimhreacha aiceanta is féidir a chumadh as na luibhin 0, 1, 2, 3, cuid acu nó iad go léir a úsáid, agus gan luibhean ar bith díobh níos minicí ná uair amháin san uimhir chéanna?

- (iii) Ríomh sa bhfoirm
- $k 2^t$
- , áit a bhfuil
- $k, t \in \mathbf{N}$
- ,

$$\sum_{r=1}^{100} r \binom{100}{r} = \binom{100}{1} + 2 \binom{100}{2} + 3 \binom{100}{3} + \dots$$

- (iv) Faigh cothromóid na líne trín phointe (1, 1) agus trín phointe comhraic den dá líne

$$4x - 7y + 13 = 0 \quad \text{agus} \quad 7x + 9y - 17 = 0.$$

Bíodh do fhreagra sa bhfoirm $ax + by + c = 0$.

- (v) Iniúchaigh an bhfuil an líne
- $x + 3y + 16 = 0$
- ina thadhlaí don chiorcal
- $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 3 = 0$
- .

- (vi) Ríomh
- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{10}$
- .

- (vii) Is é
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- maitrís an inmhapa a mhapálann
- $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- go
- $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$
- . Faigh maitrís d'inmhapa a mhapálann
- $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$
- go
- $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- .

- (viii) Má tá
- $\cos 2A = \frac{12}{13}$
- , faigh na luachanna a fhéadfadh bheith ar
- $\tan A$
- .

- (ix) Is é
- 8π
- agus
- $[2, 3]$
- an peireod agus an raon atá ag an bhfeidhm
- $x \rightarrow a + b \cos kx$
- .
-
- Faigh
- a, b, k
- .

- (x) Má tá
- $k \in G, \times$
- , (i.e. grúpa faoi iolrú), cruthaigh go bhfuil
- $(k^{-1})^{-1} = k$
- , áit a seasann
- k^{-1}
- d'inbhéarta
- k
- .

- NÓ (x) Faigh coinníoll chun go ngabhfaidh an líne a cheanglaíonn an dá phointe
- $(4p^2, 8p)$
- agus
- $(4q^2, 8q)$
- den pharabóil
- $y^2 = 16x$
- trí fhócas na parabóile.

2. (a) Faigh coinníoll a thugann réiteach, seachas an réiteach follasach (0, 0), ar an dá chomhchothromóid

$$\begin{aligned}ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0.\end{aligned}$$

Faigh an luach ar t a thugann réiteach ná fuil follasach ar na comhchothromóidí

$$\begin{aligned}5x + y &= 0 \\ 26x + ty &= 0.\end{aligned}$$

- (b) Fréamh amháin den chothromóid

$$x^3 - kx^2 + 22x - 20 = 0$$

is ea $3 + i$. Faigh luach $k \in \mathbf{R}$ mar aon leis na fréamhacha eile.

- (c) Más
- α, β, δ
- fréamhacha na cothromóide

$$x^3 - 5x + 3 = 0.$$

faigh an chothromóid gurb iad $2\alpha - 1, 2\beta - 1, 2\delta - 1$ a fréamhacha.

3. (a) Scríobh síos an téarma láir sa bhforbairt
- $(x - 2y)^{12}$
- agus ríomh a luach nuair
- $x = 1\frac{1}{2}, y = \frac{1}{6}$
- .

- (b) Má tá
- x
- chomh beag sin nach fiú a chiúb ná comhachtaí níos airde ná sin a áireamh, faigh garluach sa bhfoirm
- $a + bx + cx^2$
- ar

4. Faigh ga an chiorcail atá inscríofa sa triantán $a(2, 3)$, $b(-2, -5)$, $c(-4, 6)$.
5. (a) Faigh cothromóidí na gciorcaí a thadhlaíonn an dá ais agus a ghabhann trín phointe $(3, 6)$.
- (b) Dhá phointe shuite is ea $h(1, 0)$ agus $k(p, q)$. Faigh cothromóid lócas an phointe $t(x, y)$ sa chaoi go bhfuil $|\angle htk| = 90^\circ$.
Má tá $q = 4$, faigh an coinníoll nach mór bheith sásta ag p i dtreo is nach ngearrfaidh an lócas an ais y .

6. (a) Bíodh $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Faigh $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ sa chaoi go bhfuil

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{agus} \quad M \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Má tá $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ríomh $A^{-1}MA$.

Taispeáin go bhfuil $(A^{-1}MA)^2 = A^{-1}M^2A$ agus uaidh sin, nó ar shlí eile, ríomh M^{100} .

- (b) Is é f teilgean an phlána ar an líne $y = 2x$ comhthreomhar leis an líne $2y = x$.
Faigh mairís f .

Tá fad k i mírlíne atá comhthreomhar leis an ais y . Íomhá na mírlíne sin faoi f , tá sé h ar fhad. Faigh an coibhneas $h : k$.

7. (a) Cad a chiallaíonn an peireod de fheidhm pheireodach? Más é p peireod $f(x)$, cruthaigh gurb é $\frac{p}{m}$ peireod $f(mx)$ áit a bhfuil $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Scríobh síos raon agus peireod na feidhme

$$x \rightarrow 3 + 2 \sin \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

agus léirigh go hachomair graf na feidhme le haghaidh $0 \leq x \leq 12\pi$.

- (b) Bain úsáid as forbairt $\sin 3x$ i dtéarmaí $\sin x$ chun an ráiteas thíos a fhíorú:

Más h agus k , faoi seach, peireoid na bhfeidhmeanna f agus g agus más u an peireod de $F = f - g$, ní gá gurb é u an c.m.l. de h agus k .

8. (a) Sainítear na ceithre fheidhm seo a leanas ar $\mathbf{R} \setminus \{0\}$:

$$f : x \rightarrow x \quad g : x \rightarrow \frac{1}{x} \quad h : x \rightarrow -x \quad k : x \rightarrow -\frac{1}{x}.$$

Ag glacadh leis go bhfuil comhshuíomh feidhmeanna comhthiomsaitheach, cruthaigh gur grúpa cómhálartach é $\{f, g, h, k\}$ faoi chomhshuíomh agus scríobh síos na fô-ghrúpaí go léir atá aige.

Sainigh cad a chiallaítear nuair a dheirtear go bhfuil dhá ghrúpa iosamorfach agus taispeáin go bhfuil an grúpa thuas iosamorfach leis an ngrúpa $\{1, 3, 5, 7, (\text{mod } 8)\}$ faoi iolrú.

- (b) Bíodh $\{e, a, b, c\}$ ina ghrúpa d'ord a 4 faoi iolrú, áit arb e an t-ionannas. Má tá $a^2 = b$, cruthaigh $a^3 \neq a$ agus $a^3 \neq b$.
Taispeáin $a^3 = e \Rightarrow ac \neq e$ agus $ac \neq b$.

- NÓ** 8. (a) Faigh cothromóid ais na parabóile

$$9x^2 - 6x - 52y + 105 = 0$$

agus cruthaigh nach ngearrann an pharabóil an ais x .

Faigh comhordanáidí an fhócais agus cothromóid na treoirlíne agus tarraing stracghraf den chuar.

- (b) Má tá $c = \frac{a}{m}$, cruthaigh go bhfuil an líne $y = mx + c$ ina thadhlaí don pharabóil $y^2 = 4ax$.