

## AN ROINN OIDEACHAIS

## SCRÚDÚ ARDTEISTIMÉIREACHTA, 1977

## MATAMAITIC—ARDLEIBHÉAL—PÁIPÉAR II (300 marc)

DÉ MÁIRT, 14 MEITHEAMH—MAIDIN 9.30 go dtí 12

Sé cheist a fhreagairt.

Tá na ceisteanna go léir ar chomhfharc.

Tá Táblaí Matamaitice le fáil ón bhFeitheoir.

1. (a) Sainítear an fheidhm
- $f$
- le haghaidh
- $x \in \mathbf{R}$
- ,
- $x > 0$
- mar seo:

$$f: x \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{x^2 + k^2}{gx}}$$

áit gur buanúmhreacha iad  $k$  agus  $g$  agus  $g > 0$ . Má tá  $f(x_1) = f(x_2)$  áit  $x_1 \neq x_2$ , cruthaigh  $x_1 x_2 = k^2$ .

- (b) Nuair a ghearrtar teascán gur airde dó
- $x$
- cm ó sféar gur ga dó
- $r$
- cm is é is toirt dó ná

$$\frac{\pi}{3} x^2 (3r - x).$$

Ó sféar gur ga dó 3 cm gearrtar teascán gur airde dó  $x$  cm sa chaoi gur ionann toirt an teascáin agus 1/6 toirt an sféir. Taispeáin go bhfuil  $x$  ina fhréamh den chothromóid

$$x^3 - 9x^2 + 18 = 0$$

agus uaidh sin, nó ar shlí eile, ríomh luach  $x$  ceart go dtí dhá fhigiúr bhunúsacha. [Féach Táblaí leath. 7]

2. (a) Faigh an líon iomlán de theaghlaimí de 10 rud agus iad a thógáil 5 cinn in éineacht.

Taispeáin go bhféadfaí 10 dalta a roinnt i dhá ghrúpa de cúig i 126 slí.

Ríomh an méid slí a fhéadfaí é sin a dhéanamh má choiméadtar an bheirt is óige

(i) san ghrúpa céanna i gcónaí

(ii) scartha óna céile i gcónaí.

- (b) Faigh an chéad trí théarma i gcumhachtaí ardaitheacha de
- $x$
- den bhforbairt

$$(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)^{-\frac{1}{3}}$$

Uaidh sin, nó ar shlí eile, ríomh

$$\frac{\sqrt{1.006}}{\sqrt[3]{0.996}}$$

ceart go dtí sé ionad de dheachúlacha.

3. (a) Tarraing sceitse garbh den bhfeidhm

$$x \rightarrow \frac{x+1}{x-1}$$

atá sainithe le haghaidh  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x \neq 1$ , agus tabhair aire ar leith do na hasamtóiteanna.

- (b) Sainítear feidhm
- $y = f(x)$
- le haghaidh eatramh ar leith den bhfearann
- $\mathbf{R}$
- mar leanas:

$$y = -x$$

le haghaidh  $-\infty < x \leq 0$ 

$$y^2 = x, y > 0$$

le haghaidh  $0 < x \leq 1$ 

$$(y-1)^2 = x-1, y > 1$$

le haghaidh  $1 < x \leq 2$ 

$$(y-2)^2 = x-2, y > 2$$

le haghaidh  $x > 2$ .

Tarraing garbh-ghraf den bhfeidhm agus iniúchaigh an bhfuil

(i)  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  le haghaidh gach  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ (ii) a díorthaíoch sainithe le haghaidh gach  $x \in \mathbf{R}$ .

4. (a) Fíoraigh go bhfuil

$$\frac{1}{(r+3)(r+5)} = \frac{1}{2(r+3)} - \frac{1}{2(r+5)}$$

agus uaidh sin iniúchaigh an bhfuil an tsraith

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+3)(r+5)}$$

inréimneach (coinbhéirseach).

- (b) Tástáil le haghaidh inréimneachta

$$(i) 2 + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n+1}{n^2} + \dots$$



5. (a) Luachálaigh

(i) teora  $\frac{2n-3}{3n-2}$   $\quad$  (ii) teora  $\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$   $\quad$  (iii) teora  $\frac{1-\cos x}{\sin x}$

(b) Difreálaigh ó bhunphrionsabail i leith  $x$  an fheidhm

$$x \rightarrow \frac{1}{x} \quad \text{le haghaidh } x \in \mathbf{R}_0.$$

(c) Difreálaigh i leith  $x$ :

(i)  $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$   $\quad$  (ii)  $e^{-\frac{1}{2}(x-5)^2}$   $\quad$  (iii)  $\log_e \sin^3 2x$ .

6. (a) Píosa páipéir le haghaidh póstaer, tá sé i bhfoirm dronuilleoige gur achar dó  $18 \text{ m}^2$ . Tá na ciumhaiseanna ag an barr agus ag an bun  $1 \text{ m}$  ar leithead araon agus tá na ciumhaiseanna ag an dá thaobh  $50 \text{ cm}$  ar leithead araon. Más gá uas-achar bheith san pháosa dronuilleogach atá fágtha, faigh toisí an pháosa páipéir.

(b) Doirtear uisce faoi ráta  $19 \text{ cm}^3$  an soicind isteach i n-umar leathsféarach gur ga dó  $10 \text{ cm}$ . Faigh an ráta ag a bhfuil doimhneacht an uisce ag méadú nuair is  $1 \text{ cm}$  an doimhneacht. [Tugtar i gceist a 1(b) toirt teascáin sféir]

7. Sainítear feidhm  $f$  i leith  $x \in \mathbf{R}$  mar seo:

$$f : x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- (i) Ríomh  $f(0)$  agus taispeáin  $f(-x) = -f(x)$ .  
 (ii) Cruthaigh gur feidhm mhéadaitheach í  $f$ .  
 (iii) Cruthaigh go bhfuil pointe athchasaídh ag  $f$  ag  $x = 0$ .  
 (iv) Tarraing scéitse garbh de  $f$  agus taispeáin a chruth nuair  $x \rightarrow \pm \infty$ .

8. Ríomh

(i)  $\int_4^9 \frac{(1 + \sqrt{x})^2 dx}{\sqrt{x}}$   $\quad$  (ii)  $\int_0^{\pi/2} \cos 2x \cos 3x dx$   $\quad$  (iii)  $\int_0^{2/3} \frac{dx}{9x^2 + 4}$   
 (iv)  $\int_1^2 \frac{x dx}{(2x+1)(2x-1)}$   $\quad$  (v)  $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 3x}{\cos x} dx$  (Nod: Réalaigh  $\sin 3x$  i dtéarmaí  $\sin x$ )

9. Tá airde  $h \text{ cm}$  ag teascán a ghearrtar de sféar gur ga dó  $r \text{ cm}$ . Féach an léaráid. Taispeáin trí suimeáil gur ionann toirt an teascáin agus

$$\frac{\pi}{3} h^2(3r - h).$$



10. Seicheamh de théarmaí is ea

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

sa chaoi go bhfuil

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2 + u_n}.$$

- (i) Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil  $u_n > 0$  le haghaidh gach  $n$  agus bain as sin go bhfuil  $u_n > 2$  le haghaidh gach  $n > 1$ .  
 (ii) Scríobh amach an chéad ceithre théarma den seicheamh agus fíoraigh  $|u_4 - \sqrt{5}| < 0.001$ .  
 (iii) Má tá

$$k = 2 + \frac{1}{2 + k}$$

agus má tá

$$\frac{u_{n+1} - k}{u_n - k} = \frac{-1}{(2 + k)(2 + u_n)},$$

cruthaigh

$$|u_{n+1} - k| < \frac{1}{12} |u_n - k|.$$

- (iv) Déaduchtaigh  $|u_{n+1} - k| \rightarrow 0$  nuair  $n \rightarrow \infty$ .