SCRÚDÚ ARDTEISTIMÉIREACHTA, 1977

MATAMAITIC—ARDLEIBHÉAL—PÁIPÉAR I (300 marc)

DÉ LUAIN, 13 MEITHEAMH—MAIDIN, 9.30 go dtí 12.

Sé cheist a fhreagairt.
Tá na ceisteanna go léir ar chomhmharc.
Tá Táblaí Matamaitice le fáil ón bhFeitheoir.

1. Cruthaigh gur

$$\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

fad an phointe (x_1, y_1) ón líne $ax + by + c = 0$, áit go bhfuil an pointe (x_1, y_1) ar an dtaobh céanna den líne agus atá an bunphointe agus go bhfuil $c > 0$. Tarraing as san cothromóidí comhroinnteoirí na n-uilleacha idir an líne $3x + 4y + 8 = 0$ agus an ais-x.
Cumtar triantán ag na trí líne

$$y = 0; \quad 3x + 4y + 8 = 0; \quad 4x + 3y + 3 = 0.$$

Fíoraigh go bhfuil stuaic amháin den triantán san 4-ú ceathrú (i.e. $x > 0$, $y < 0$). Inscríobhtar ciorcal san triantán. Ríomh fad a gha.

2. Faigh cothromóidí an dá chiorcal a thadhlann an ais-x agus a théann trí an dá phointe $(2, -2)$ agus $(-5, -1)$. Má thadhlann na ciorcail an ais-x ag p agus q, ríomh $|pq|$.

3. (*a*) Tugtar cothromóid de pharabóil mar

$$y(y - 6) = 3x.$$

Faigh
(i) comhordanáidí den stuaic agus den bhfócas
(ii) cothromóidí den ais agus den treoirlíne.

Sceitseálaigh an pharabóil agus trí feidhm a bhaint as achar triantáin áirithe, nó ar shlí eile, cruthaigh go bhfuil achar an réigiúin atá iata ag an parabóil agus an ais-y níos mó ná 9.

(*b*) Faigh cothromóidí an dá thadhlaí don éilips

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

atá comhthreomhar leis an líne $x = y$.

4. (*a*) Inmhapa líneach is ea f sa chaoi go bhfuil

$$f(\bar{\imath}) = 4\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} \text{ agus } f(\bar{\jmath}) = -3\bar{\imath} - \bar{\jmath},$$

áit gur aonadveicteoirí atá ingearach lena céile iad $\bar{\imath}$ agus $\bar{\jmath}$. Scríobh síos maitrís f agus uaidh sin, nó ar shlí eile, faigh íomhá an veicteora $\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ faoi f.
Cumtar triantán pqr ag na veicteoirí

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Íomhá an triantáin pqr faoi f is ea an triantán xyz. Ríomh an coibhneas:

$$\text{achar } \triangle xyz : \text{achar } \triangle pqr.$$

(*b*) Bíodh

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bíodh λ_1, λ_2 mar fhréamhacha na cothromóide cearnaí $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ agus bíodh $\lambda_1 > \lambda_2$.
(i) Faigh dhá veicteoir neamh-nialasacha

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ agus } \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sa chaoi go bhfuil

$$M\bar{x} = \lambda_1\bar{x} \text{ agus } M\bar{y} = \lambda_2\bar{y}$$

(ii) Fíoraigh

$$M^2 - 4M - 5I = 0.$$

5. (*a*) [illegible] ar $x^2 - y^2$ agus uaidh sin, nó ar shlí eile, faigh dhá [illegible] ar 5 gur suim dóibh 2.
Faigh fachtóirí ar

$$z^2 - 2z + 5$$

agus fíoraigh do fhreagra.

(*b*) Cruthaigh
(i) $|z|^2 = z\,\bar{z}$ áit gur uimhir choimpléascach í z
(ii) $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$ áit $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

agus tarraing as san go bhfuil

$$\overline{z_1 . z_2 . z_3} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2 . \bar{z}_3.$$

Bíodh $f(z) = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$ áit gur réaduimhreacha iad a_0, a_1, a_2, a_3. Má thugtar gur fréamh

6. Cad is brí leis an ráiteas: Tá feidhm peireodach? Scríobh síos an peireod agus an raon de

$$\text{(i) } x \to \sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \qquad\qquad \text{(ii) } x \to -\sin(x+2)$$

áit go bhfuil an dá fheidhm sainithe ar $\mathbf{R}$.
Más 2 peireod na feidhme $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \to a + b \sin kx$ agus más $[0, 1]$ an raon, faigh luachanna na réaduimhreacha deimhneacha a, b, k.
Más 6π peireod na feidhme $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \to \sin 3x + \sin tx$, faigh luach amháin ar $t \in \mathbf{R}$.

7. (*a*) Cad a chiallaíonn meánlár triantáin. Is comhthreomharán é $opqr$ agus lárphointe $[or]$ is ea m. Gearrann an líne pm an líne oq ag k. Agus o a thógáil mar bhunphointe, réalaigh an veicteoir $\vec{k}$ i dtéarmaí $\vec{p}$ agus $\vec{r}$ agus faigh an coibhneas $|\ \vec{ok}\ | : |\ \vec{kq}\ |$.
(*b*) Sainigh an t-iolrach scálach de dhá veicteoir. Bíodh f an fheidhm scálach iolrach atá sainithe mar leanas:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \,.\, \vec{y}.$$

Cruthaigh
(i) $f(a\vec{x}, \vec{y}) = af(\vec{x}, \vec{y})$, áit $a > 0$
(ii) $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = f(\vec{x}_1, \vec{y}) + f(\vec{x}_2, \vec{y})$
Sainigh an ráiteas: Is feidhm délíneach í f (.i. feidhm líneach i ndá athróg).

8. (*a*) Cruthaigh trí ionduchtú go bhfuil

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \qquad \text{áit } n \in \mathbf{N}.$$

Taispeáin go bhfuil an toradh, thuas, fíor freisin le haghaidh $n \in \mathbf{Z}$.
(*b*) Má tá $\quad t = \tan \dfrac{A}{2}, \quad$ cruthaigh $\sin A = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
Bain úsáid as do chuid Táblaí chun luach ar A sa bhfearann $\pi/2 < A < \pi$ a fháil a shásaíonn an chothromóid

$$3 \sin A - 2 \cos A = 3.$$

Fíoraigh gur réiteach eile $A = \pi/2$.

9. I leith aonad veicteoirí atá ingearach lena céile faigh maitrís an rothlaithe thuathail, R_θ, thar an bhunphointe a mhapálann an veicteoir

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ chun an veicteora } \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Más S_0 an tsiméadracht lárnach sa bhunphointe, faigh cothromóid íomhá an chuair $y^2 = x(2-x)$ faoi S_0 'na dhiaidh R_θ.

10. A. (*a*) Bíodh H an tacar d'uimhreacha den bhfoirin

$$p - q\sqrt{2}, \qquad \text{áit } p, q \in \mathbf{Z}$$

Cruthaigh
(i) go bhfuil H iata faoi shuimiú
(ii) go bhfuil suimiú comhthiomsaitheach i H
(iii) go bhfuil ball ionannais faoi shuimiú i H
(iv) i gcás gach ball de H faoi shuimiú go bhfuil ball inbhéartach i H comhfhreagrach leis.
Má chuirtear "méadú" in áit "suimiú" i (i), (iii), (iv), thuas, cé acu díobh atá bréagach anois!. Cuir fáthanna le do fhreagraí.
(*b*) Dronuilleog is ea $pqrs$, ach ní cearnóg í. Faigh dhá líne X, Y agus pointe c sa chaoi go mapálann $pqrs$ air féin faoi S_X, S_Y, S_c, áit gur siméadrachtaí aiseacha iad S_X agus S_Y sna línte X, Y, faoi seach agus gur siméadracht lárnach é S_c sa phointe c. Tóg tábla Cayley le haghaidh an tacair $\{1_\pi, S_X, S_Y, S_c\}$ faoi chomhshuíomh, áit gurb é 1_π an t-inmhapa ionannais agus iniúchaigh an bhfuil na cáilíochtaí uile de ghrúpa aige.
Bíodh $\{p, q, r, s\}$ ina íomhá $\{p, q, r, s\}$ faoi inmhapa. Scríobh síos ceithre chúpla den inmhapa seo nach bhfaigfí ó 1_π, S_X, S_Y, S_c ná óna gcomhshuíomh.

NÓ

10. B. (*a*) I bpota ina bhfuil mirlíní tá dath dearg ar 12 cheann, dath gorm ar 6 cinn, dath buí ar 2 cheann. Baintear ar corr mirlín as an bpota, cláraítear an dath agus athchuirtear an mirlín sa phota. Déantar é seo 5 huaire ar fad. Faigh an dóchúlacht go gcláraítear an dath dearg
(i) dhá uair go cruinn
(ii) dhá uair ar a mhéid
(iii) trí huaire ar a laighead.
Is triail í 5 mhirlín a thoghadh, mar thuas, as an bpota. Déantar an triail 5 huaire as a chéile agus cuireann duine geall go mbeidh an dath dearg ann dhá uair go cruinn i gceann amháin, ar a laighead, de na triaileacha. Iniúchaigh an bhfuil seans maith ag an duine an geall a bhuachaint.
(*b*) Tá píosa gloine i bhfoirm triantáin agus is iad x, y, z meánphointí na slios mar atá san léaráid. Titeann díoradán deannaí ar corr ar an ngloine. Faigh an dóchúlacht go dtiteann an díoradán ar an bpíosa triantánúil xyz.