AN ROINN OIDEACHAIS

SCRÚDÚ ARDTEISTIMÉIREACHTA, 1974

MATAMAITIC — ARDLEIBHÉAL — PÁIPÉAR I
(300 marc)

DÉ LUAIN, 17 MEITHEAMH — MAIDIN, 9.30 go dtí 12

Sé cheist a fhreagairt.
Tá na ceisteanna go léir ar chomhmharc.
Tá Táblaí Matamaitice le fáil ón bhFeitheoir.

1. Más θ, $\theta < \frac{\pi}{2}$, an uillinn idir dhá líne dhíreacha a ghearrann a chéile ag a bhfuil grádáin acu m_1, m_2 faoi seach, taispeáin go bhfuil

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Dhá stuaic de chearnóg $pqrs$ isea $p\ (0, -3)$ agus $r(5, 0)$ sa chaoi gur trasnán é $[pr]$. Faigh grádáin ps agus pq. Uaidh sin, nó ar shlí eile, ríomh comhordanáidí s agus q.

2. Má ghearrann na ciorcail $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ agus $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ go dronuilleach, cruthaigh go bhfuil $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$.
Is pointí ar phlána iad $a(1, 1)$ agus $b\ (2, 3)$. Taispeáin gur ciorcal é S, má tá $S = \{s \mid |as| = 2\,|sb|\}$.
Faigh an chothromóid de chiorcal eile, gur lárpointe dó $(0, 0)$, a ghearrann S go dronuilleach.

3. Is é $x = 5y - 2x^2$ an chothromóid de pharabóil. Faigh
(i) comhordanáidí an fhócais,
(ii) cothromóid na treoirlíne.
Rianaigh an pharabóil.
Taispeáin gur $x = 2t$, $y = \pm\, 3\sqrt{1 - t^2}$ an chothromóid pharaiméadrach d'éilips.

4. Is é $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ maitrís an chlaochlaithe, f, i leith na veicteoirí ortanormalacha $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ mar bhonn. Ar léaráid, léirigh íomhánna na veicteoirí $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, agus $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ faoi an chlaochlú f agus fíoraigh go bhfuil f líneach ach nach bhfuil sé iosaiméadrach.

Más λ_1, λ_2 fréamhacha den chothomóid chearnach $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, faigh aon dá veicteoir $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ agus $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, ná fuil nialasach, sa chaoi go bhfuil

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{agus} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

nuair is λ_1 an fhréamh is mó.
Faigh na luachanna ar a, b, c, d nuair atá

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fíoraigh go bhfuil

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. (*a*) Más $\bar{z}$ an coimpléasc comhchuingeach den uimhir choimpleascach neamhnialasach z, faigh dhá argóint de z ionas go mbeidh

$$z - \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\bar{z} = 0.$$

(*b*) Má tá $z = x + iy$, réalaigh (i) $|z|$ (ii) $|z - 3|$ (iii) $|z + 1|$ i dtéarmaí x agus y.
Réitigh an chothromóid $|z - 3| = |z + 1|$ agus léirigh ar léaráid Argand an tacar

$$K = \{z \mid |z - 3| = |z + 1|\}.$$

Roghnaigh ball amháin de K agus don bhall seo fíoraigh $|z - 3| = |z + 1|$.

[THALL

6. (*a*) Sceitseálaigh grafanna na bhfeidhmeanna

(i) $x \rightarrow \cos |x|$

(ii) $x \rightarrow |\cos x|$

sa bhfearann $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ agus ó na grafanna scríobh síos an peireod agus an raon de (i) agus (ii).

Faigh an peireod agus an raon de gach ceann de na feidhmeanna

(iii) $x \rightarrow \cos^2 x$

(iv) $x \rightarrow \sin^2 x \cos^2 x$ agus

sceitseálaigh grafanna (iii) agus (iv) sa bhfearann $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(*b*) Cruthaigh go bhfuil

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}, \quad |xy| < 1$$

agus uaidh sin faigh luach

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8}.$$

7. (*a*) Má tá $\vec{r}_1 = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$, $\vec{r}_2 = -5\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}$, faigh (i) $|\vec{r}_1|$ (ii) $\vec{r}_1 . \vec{r}_2$, (iii) an uillinn θ idir $\vec{r}_1$ agus $\vec{r}_2$ go dtí an chéim is gaire.

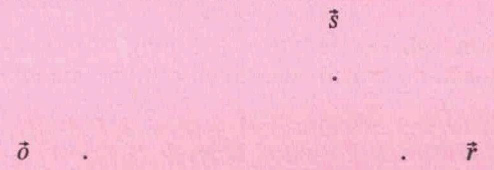
Faigh lócas $\vec{r}$ sa chaoi go bhfuil $(\vec{r} + \vec{r}_1) \perp (\vec{r} - \vec{r}_1)$, áit a bhfuil $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Léirigh do fhreagra trí léaráid a tharraingt.

(*b*) Taispeántar na veicteoirí $\vec{r}$ agus $\vec{s}$ san léaráid. Déan cóip den léaráid id' fhreagarleabhar agus léirigh ann an bhrí atá le

$$\frac{(\vec{r} - \vec{s}) . \vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Simpligh

$$\frac{\vec{r} . \vec{s}}{|\vec{r}|} + \frac{(\vec{r} - \vec{s}) . \vec{r}}{|\vec{r}|}.$$



8. (*a*) Is iad $(-2, 3)$, $(3, 4)$ na hionad veicteoirí de $\vec{p}$ agus $\vec{q}$, faoi seach. Faigh na hionad veicteoirí de (i) $\vec{pq}$ (ii) $\vec{qp}$ agus léirigh iad ar léaráid.

(*b*) Ag glacadh leis go bhfuil na haisí ingearach lena chéile, faigh an maitrís le haghaidh

(i) rothlú r trí uillinn θ, $\theta < \pi/2$, nuair atá an bunphointe mar lár,

(ii) teilgean p comhthreomhar leis an x-ais ar an líne $y + x = 0$,

(iii) $p \circ r$ (i.e. p i ndiaidh r).

Más é $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ íomhá $(4, 0)$ faoi $p \circ r$, faigh luach θ.

9. (*a*) Ag glacadh leis go bhfuil

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^3,$$

taispeáin go bhfuil

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}.$$

(*b*) Más fréamh amháin den chothromóid $z^3 + az + b = 0$, $a, b \in R$, is ea $z = 1 + 2i$, faigh na luachanna ar a agus b. Faigh freisin na fréamhacha eile den chothromóid.

10A (*a*) Tacar na n-uimhreach coimpléascach den bhfoirm $a + b\sqrt{-5}$ is ea T, áit go bhfuil $a, b \in Q$, gan a agus b a beith nialasach ag an am céanna. Taispeáin gur grúpa é T faoi iolrú d'uimhreacha coimpléascacha ag glacadh leis an dlí comhthiomsúcháin faoi iolrú i T.

(*b*) $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$. Grúpa is ea A faoin obráid $*$ agus grúpa is ea B faoin obráid $\oplus$. Má tá na grúpaí A, $*$ agus B, $\oplus$ iosamorfach, mínigh an iosamorfacht seo.

Bíodh

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Déan Tábla Cayley i gcóir an tacair seo faoi iolrú maitrisí. Ag glacadh leis an dlí comhthiomsúcháin faoi iolrú maitrisí, taispeáin ón tábla, nó ar shlí eile, gur grúpa S, $\times$.

Taispeáin go bhfuil na grúpaí S, $\times$ agus Z_4, $+$ iosamorfach. [Z_4 is ea an rang iarmhar faoi shuimiú, mod 4].

NÓ

10B. (*a*) Tá fiche ticéad raifil ann agus tá gach ceann marcálta le ceann des na huimhreacha aon go dtí fiche. Níl an uimhir chéanna ar aon dá thicéad. Roghnaítear ticéad amháin ar corr. Faigh an dóchúlacht gur (i) méadaí de 5 nó de 7 é (ii) gur méadaí de 3 nó 5 é.

(*b*) Caitear péire dísle cúig uaire. Cad é an dóchúlacht go bhfaightear an uimhir chéanna ar an dhá dhísle dhá uair ar a laghad?