

AN ROINN OIDEACHAIS

SCRÚDÚ ARDTEISTIMÉIREACHTA, 1973

MATAMAITIC—ARDLEIBHÉAL—PÁIPÉAR II (300 marc)

DÉ CÉADA OIN, MEITHEAMH 13—MAIDIN 9.30 go dtí 12

Sé cheist a fhreagairt.

Tá na ceisteanna go léir ar chomhluach.

Tá táblaí Matamaitice ar fáil ón bhFeitheoir.

1. (a) Déan cur síos ar an gcruith ginearálta agus ar thréithe na ngnáth grafanna a thagann i gceist le linn réiteacha cothromóidí ciúbacha le comhéifeachtaí réadacha a bheith á n-iniúchadh, nuair atá
- na fréamhacha go léir réadach agus éagsúil,
 - na fréamhacha go léir réadach ach dhá cheann acu a bheith cothrom,
 - na fréamhacha go léir réadach agus cothrom,
 - fréamh amháin réadach agus na fréamhacha eile coimpléascach.

- (b) Fréamh amháin den chothromóid

$$2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

isea i , áit $i = \sqrt{-1}$. Faigh na fréamhacha eile den chothromóid.

2. (a) Scríobh síos an téarma ginearálta den bhforbairt $(1+x)^n$, áit gur slánuimhir dheimhneach í n , agus trí shuimeáil, nó ar shlí eile, réalaigh

$$\sum_{r=0}^n \frac{1}{r+1} {}^n C_r$$

i dtéarmaí n .

- (b) Más féidir
- x^4
- agus comhachta de
- x
- níos airde ná sin a fhágáil ar lár, simpligh

$$\sqrt[3]{1+x} - \left[1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \right]$$

agus uaidh sin luacháiligh $\sqrt[3]{1010}$ go dtí cúig áit dheachúlacha.

3. (a) Luacháiligh (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1}$, (ii) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{2n-3n^2}{5-4n+7n^2}$.

Faigh suim na sraithe

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} \dots$$

Uaidh sin, ag baint úsáide as an toradh (i) thuas, nó ar shlí eile, taispeáin go bhfuil an tsraith sin coinbhéirseach.

[Nóta: Is mar a chéile tr agus teorainn]

- (b) Taispeáin ná fuil an tsraith

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1}$$

coinbhéirseach.

Cruthaigh

$$\frac{1}{\sqrt{r(r+1)}} > \frac{1}{r+1}$$

le haghaidh $r \geq 1$ agus scrúdaigh le haghaidh coinbhéirseachta an tsraith

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r(r+1)}}$$

4. (a) Bain úsáid as an dtástáil Comparáideach chun an tsraith

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+2n^2+n^3}$$

a thástáil le haghaidh coinbhéirseachta.

- (b) Bain úsáid as an dtástáil Cóimheasach chun an tsraith

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r^2}$$

a scrúdú le haghaidh coinbhéirseachta.

5. (a) Dífreáiligh ó bhun phrionsabail an fheidhm $f : x \rightarrow \tan x$ i leith x sa bhfearann

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Dífreáiligh i leith x aon trí cinn díobh seo a leanas:

(i) $\frac{x-1}{x+1}$, (ii) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, (iii) $e^{\tan 2x}$, (iv) $x^2 \log_e x$.

- (b) Taispeáin gur

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

díorthaíoch $\sin^{-1} t$ i leith t áit go bhfuil $|t| < 1$.

Má tá $x = t + \sin^{-1} t$, cruthaigh

$$(1-t^2) \frac{d^2x}{dt^2} - t \frac{dx}{dt} + t = 0.$$

6. Is buan é suim achair dhromchla sféir agus achair dhromchla chiúib. Taispeáin go bhfuil toirt an sféir agus toirt an chiúib le chéile ina íosluch nuair atá fad fhaobhair an chiúib a dhá oiread fhad ga an sféir agus ríomhaigh an t-íosluch sin.

7. Sainítear na feidhmeanna f agus g mar leanas:

$$\begin{aligned} f : x &\rightarrow \sin x - x \cos x = f(x), & x \in R, \\ g : x &\rightarrow x \sin x = g(x), & x \in R. \end{aligned}$$

- (i) Scríobh síos luachanna $f(\pi)$, $g(\pi)$, $f(-\pi)$, $g(-\pi)$.
 (ii) Taispeáin

$$f(x)[g(x) - g(-x)] = g(x)[f(x) + f(-x)]$$

- (iii) Cruthaigh go bhfuil an fheidhm f ag méadú sa bhfearann $0 < x < \pi$.
 (iv) Ríomhaigh

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx$$

8. (a) Ríomhaigh

(i) $\int_1^3 (x^{-3} + x^3) dx$

(ii) $\int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x dx$.

(iii) $\int_0^1 \frac{x dx}{4 - 4x + x^2}$.

- (b) Más tairismheach é a agus más feidhm é f sa chaoi go bhfuil

$$f(a-x) = f(a) - f(x)$$

le haghaidh gach $x \in R$, taispeáin

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

agus bain as sin go bhfuil

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2} a f(a).$$

Má tá $f : x \rightarrow \sin^5 x$, fíoraigh

$$f(2\pi - x) = f(2\pi) - f(x)$$

agus uaidh sin, nó ar shlí eile, ríomhaigh

$$\int_0^{2\pi} \sin^5 x dx.$$

9. Taispeáin ná fuil aon réad-phointe athfhillteach ag ghraf na feidhme

$$y^2 = \frac{1}{1-x^2}.$$

Sceithseáiligh an graf agus cuir in úil an réigiún atá cuimsithe idir an ghraf agus an líne $y = 2$. Ríomhaigh an toirt a ghintear trí an réigiún sin a rothlú timpeall na y -aise.

10. Tugtar duit gur x_r gharluach $1/t$ áit a bhfuil $t > 0$ agus $t \in R$ agus dá bhrí sin gur féidir glacadh leis go bhfuil uimhir h_r ann sa chaoi go bhfuil

$$\frac{1}{t} = x_r + h_r.$$

Má tá h_r chomh beag sin nach gá a chearnóg ná comhachtaí níos airde ná sin a chur san áireamh, taispeáin, trí gharluach h_r a fháil ar dtús, go bhfuil

$$x_r(2-tx_r) [= x_{r+1} \text{ (abair)}]$$

ina gharluach níos fearr at $1/t$.

Má thugtar duit go bhfuil $0.6 (= x_0)$ na gharluach ar $1/\sqrt{3}$, faigh gharluach níos fearr (x_1) ag baint úsáide as an bhfoirmle thuas le haghaidh x_{r+1} .