Siméadracht Amchúlaithe Chórais Dinimiciúil

Dymphna Graham, Siobhán Keane,
agus Anthony G.O'Farrell

Roinn na Matamaitice,
Ollscoil na hÉireann,
Má Nuad.

Coimriú:

Machnaítear ar chóras dinimiciúil a thaispeánann siméadracht amchúlaithe, go háirithe sa chás nuair is ionbhlóid an tsiméadracht. Tugtar aicmiú logánta iomlán de na samplaí réadanailíseach aontoiseach dena leithéid de chóras, agus tugtar faoi ndeara nach bhfuil acu ach pointí fosaithe éagobhsaí. Taispeántar go dtárlaíonn sé seo de bharr cúiseanna ginearálta.

1 RÉAMHRÁ

Machnaímid ar chóras dinimiciúil scoite

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 1, 2, 3, \cdots . \tag{1}$$

inar feidhm leanúnach í $\varphi : X \to X$ ar spás toipeolaíoch X. Éiríonn a leithéid de chóras in eolaíocht fheidhmeach nuair a ghlactar samplaí as córas dinimiciúil leanúnach ag amanta scoite, nó nuair a ghearrann a chuid ruthag sa phasspás trí ghearradh Poincaré. Éiríonn siad freisin go nádúrtha san airgeadaíocht agus sa ríomhaireacht. Ón dearcadh matamaiticiúil, is féidir smaoineamh ar pé feidhm ar bith a thógann tacar éigin ann féin mar fheidhm aistriú chórais dinimiciúil, agus dá bhrí sin is feídir torthaí theoiric na gcóras dinimiciúil scoite a chur ag obair i réimsí eile de chuid na matamaitice, mar shampla i dteoiric na bhfeidhmeanna coimpléacsacha agus sa chéimseata.

Ag breathnú ar chóras (1) dúinn, bíonn suim againn in eiseadh pointí fosaithe ($\varphi(x) = x$), pointí peiriadacha ($\varphi^n(x) = x$), agus a dtréithe (aomaíocht, éarthaíocht, comhsaíocht, éagcomhsaíocht), agus in eiseadh gnéithe éagsúla den anord [6].

B'é Poincaré an chéad duine a thug faoi staidéar ar a leithéid de chórais agus ceisteanna i gcointeacs ginearálta [1]. Ba é fadhb n choirp a spreag é chun an taighde seo. B'é Poincaré, freisin, a thug faoi ndeara go raibh tréithe ar leith ag baint le córas a bhfuil siméadracht amchúlaithe ann. Feach freisin [2].

Sainmhíniú 1.1 *'Sé* **siméadracht amchúlaithe** *chóras* (X, φ) *ná hoiméamorfacht* $\sigma : X \to X$ *le*

$$\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma = \varphi^{-1}.$$

Ar ndóigh, níl a leithéid de shiméadracht ag (X, φ) munar feidhm dhétheilgeach í φ.

Mar shampla, bíodh Y phasspás chórais n-choirp, agus abair gurb é X fo-spás na staideanna nach bhfuil imbhualadh ós a gchomhair amach agus nach n-éiríonn as staid imbhuailte. Bíodh $\varphi : X \to X$ an mhapáil a gheibhtear nuair a shuímeáltar an córas ar feadh aonaid amháin ama, agus abair gurb é $\sigma : X \to X$ an mhapáil a choiméadann seasta gach suíomh agus a chúlaíonn gach veicteoir móimintim. Ansin is siméadracht amchúlaithe í σ de chuid (X, φ).

Mar shampla eile, smaoinigh ar bhilléardaí ar bord ar bith atá dronnach agus le teorainn Γ atá slim. Tóg $X = \Gamma \times (0, \pi)$ agus abair go bhfuil

$$\varphi(p, \theta) = (p', \theta')$$

nuair is é p' an chéad phointe eile ina mbuaileann an liathróid an teorainn, más rud é go bhfágann sé an teorainn ag an bpointe p agus ag déanamh uilinn θ leis an dtadhail ag p sa treo tuathail, agus nuair is é θ' an uilinn ina bhfágann an liathróid an pointe p' taréis an imbhuailte. Is siméadracht amchúlaithe, sa chás seo, an mhapáil

$$\sigma : (p, \theta) \mapsto (p, \pi - \theta).$$

Tabhair faoi ndeara go dtárlaíonn

$$\sigma \circ \sigma = \mathbb{1} \qquad (= \text{an mhapáil chéannachta ar } X)$$

i.e. is *ionbhlóidí* na siméadrachtaí seo. Tá na hionbhlóidí usáideach i ngrúptheoiric, agus tá an léama seo leanas bunúsach, iomráiteach, agus simplí:

Léama 1.2 *Bíodh G ina grúpa agus $\varphi \in G$. Ansin tá na ráitis seo leanas coibhéiseach:*
(1) Tá ionbhlóid $\sigma \in G$ ann le $\sigma^{-1}\varphi\sigma = \varphi^{-1}$.
(2) Gheibhtear φ mar thoradh $\tau_1\tau_2$ dhá ionbhlóidí.

Atoradh 1.3 *Bíodh (X, φ) ina córas dinimiciúil. Tá siméadracht inbhlóideach amchúlaithe air díreach nuair is féidir φ a scríobh mar chomshuíomh $\tau_1 \circ \tau_2$ dhá ionbhlóidí.*

De bharr an bhreathnaithe seo, agus ós rud é gur aimsígh duine dúinn péirí ionbhlóidí nea-chómhalartacha i gcointéacsanna éagsúla, go háirithe ag baint le fadhbanna neastacháin [3, 4, 5], do bheartaíomar ar scrúdú ón dtús amach a dhéanamh ar an bhfeiniméan. San alt seo, cuirimíd síos ar an gcás aontoiseach.

2 CÓRAIS AONTOISEACHA.

Bíodh $-\infty \leq a < c < b \leq +\infty$, agus $X = (a, b)$, eatramh den líne réadach. Tá slí shimplí ann chun ionbhlóid a chumadh ar X a fhágann c fosaithe. Tosnaíonn tú le feidhm shlim (=indifreálaithe go héagraíce) $f : (a, b) \to (0, +\infty)$ leis na hairíonna:

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0, \quad a < x < c, \\ &f'(c) = 0, \\ &f'(x) > 0, \quad c < x < b, \end{aligned} \tag{2}$$

agus

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \uparrow b} f(x). \tag{3}$$

Ansin, do gach $x \in (a, b)$, sainíonn tú $\tau(x)$ leis an gcudromóid

$$\{z : f(z) = f(x)\} = \{x, \tau(x)\}. \tag{4}$$

'Sé sin le rá, má tá dhá phointe sa tacar comhréidh $f^{-1}f(x)$, 'sé $\tau(x)$ an ceann nach x é, agus sa chás eile $(x = c)$ tá $\tau(x) = x$.

Is léir gur ionbhlóid í τ, agus más rud é nach bhfuil f *maol* ag c (*i.e.* le gach díorthach nialas) is féidir a thaispeaínt go bhfuil τ slim, le forbairt Taylor

$$\tau(x) \sim c - (x - c) + b_2(x - c)^2 + b_3(x - c)^3 + \cdots$$

timpeall ar c, agus is féidir na comhéifeachtaí b_n a scríobh i dtéarmaí de na comhéifeachtaí Taylor de f ag c.

Ar ndóigh, is féidir an tógail seo a dhéanamh gan chur i gcás go bhfuil f indifreálaithe. Ní gá ach nach bhfuil níos mó ná dhá pointe i ngach tacar $f^{-1}f(x)$, agus ansin is féidir ionbhlóid a shainiú sa tslí chéanna. Gheibhtear ionbhlóidí ar (a, b), mar shampla, nach bhfuil ach leanúnach, nó nach bhfuil acu ach difreáil nó dhó. Éiríonn roinnt mhaith deacrachtaí más mian linn an feiniméan a scrúdú go ginearálta, agus dá réir sin cuirimid béim anseo ar an gcás is dea-bhéasaí : an cás réadanailíseach. Tógaimíd freisin $c = 0$ (gan cailliúint ginearáltachta).

Tairiscint 2.1 *Bíodh $f(x) = x^{2m} + a_{2m+1}x^{2m+1} + \cdots$ réadanailíseach, agus cuir i gcás nach bhfuil sí réidh. Ansin tá $\tau(x) = -x + b_2x^2 + \cdots$ réadanailíseach freisin, agus is uimhir réidh an chéad n le $b_n \neq 0$.*

Cruthú.Fágaimid ar leataoibh sonraí an chruthaithe go bhfuil τ réadanailíseach. Níl morán deacrachta ag baint leis an gcuid eile den tairiscint: Ós rud é nach bhfuil f réidh, is féidir í a scríobh mar

$$f(x) = x^{2m} + a_{2m+2}x^{2m+2} + \cdots + a_{2n}x^{2n} + a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots$$

le $a_{2n+1} \neq 0$. Sá chás $a_{2n+1} > 0$, feictear go bhfuil $f(x) > f(-x)$ nuair atá $x > 0$ beag, agus dá bhrí sin tá

$$\begin{aligned} \tau(x) &< -x \quad ,x > 0 \\ \tau(x) &< x \quad ,x < 0 \end{aligned}$$

agus leanann an tairiscint go díreach. Téann an cruthú mar an gcéanna sa chás $a_{2n+1} < 0$.

Atoradh 2.2 *Má thógaimid dhá fheidhm réadanailíseach f_i den tsaghas thuas agus más iad τ_i an dá ionbhlóid a gheibhtear uatha, agus muna bhfuil $\tau_1 = \tau_2$, ansin tá 0 mar phointe fosaithe neodrach éagomhsaí ag an gcóras dinimiciúil $((a, b), \tau_1 \circ \tau_2)$.*

Cruthú. Le athrú athróga, is féidir glacadh leis go bhfuil $\tau_1(x) \equiv -x$. Ansin leanann an toradh go furasta, ag baint úsáide as an anailís ghrafach [6].

Tairiscint 2.3 *Go logánta, éiríonn gach ionbhlóid réadanailíseach τ i gcomharsanacht pointe fosaithe ar an líne réadach ó fheidhm éigin f sa tslí thuas.*

Cruthú.Bíodh $\tau(x) = -x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$ ina ionbhlóid anailíseach le 0 fosaithe. Tóg

$$f(x) = (x - \tau(x))^2 = x^2 + \cdots .$$

Ansin tá $f(\tau(x)) = f(x)$, agus tá f 2-1 ar chomharsanacht phollta de 0, mar a theastaíonn.

Tairiscint 2.4 *Bíodh 0 mar phointe fosaithe de córas réadanailíseach aontoiseach $((a, b), \varphi)$. Bíodh ionbhlóid τ mar shiméadracht amchúlaithe den córas, agus $\tau(0) = 0$. Ansin is pointe neodrach éagomhsaí é 0 den chóras.*

Is furasta a fheiscint go bhfuil an anailís chéanna dlisteanach i gcomhair córas dinimiciúil coimpléacsach holamorfach aontoiseach, ar chomharsanacht pointe fosaithe sa phlána.

Maidir le córais neamh-anailíseach ar an líne, is féidir cuid mhaith den anailís a chur tríd sa chás slim, muna bhfuil an fheidhm f maol ag c. Go háirithe tá analóga na dTairiscintí thuas fíor, ag athrú anailíseach go slim ionta.

3 SIMÉADRACHT AMCHÚLAITHE AGUS AN ÉAGOMHSAÍOCHT, GO GINEARÁLTA.

Tá feiniméan ginearálta taobh thiar den rud a tharlaíonn i dTairiscint (2.4).
Abair gur córas scoite ar bith é (X, φ), agus $p \in X$. Meabhraigh gur pointe fosaithe *aomaíoch* é p más rud é go bhfuil $\varphi(p) = p$, agus do gach comharsanacht U de p tá comharsanacht $V \subset U$ ann agus $\varphi^n(V) \subset U, \forall\, n \geq 1$, agus $\varphi^n(x) \to p, n \uparrow +\infty, \forall\, x \in V$. Freisin, is pointe fosaithe *éarthaíoch* é p más rud é go bhfuil φ détheilgeach in aice le p agus gur pointe aomaíoch é p don chóras φ^{-1}. Sa tslí chéanna, sainmhínítear *ciogal aomaíoch* agus *ciogal éarthaíoch.* Saghas comhsaíocht láidir isea an aomaíocht, agus saghas eagomhsaíocht láidir isea an éarthaíocht.

Ní minic go mbíonn an pointe céanna mar phointe aomaíoch agus éarthaíoch do chóras, ach tárlaíonn sé, mar shampla nuair is spás scoite é X.

Léama 3.1 *Bíodh X ina spás T_1 (i.e. le gach aonrachán iata), agus bíodh p cnuasphointe de X. Ansin ní féidir le p bheith ina pointe aomaíoch agus éarthaíoch don chórus céanna ar X.*

Cruthú. Díreach.

Tairiscint 3.2 *Bíodh X ina spás T_1, agus bíodh cnuasphointe $p \in X$ mar phointe cioglach de chóras (X, φ), le ciogal*

$$C = \{p, \varphi(p), \cdots, \varphi^{n-1}(p)\}.$$

Bíodh siméadracht amchúlaithe τ ag (X, φ) le $\tau(p) \in C$. Ansin níl an ciogal C aomaíoch ná éarthaíoch.

Cruthú. Comhchuingíonn τ an mhapáil φ go dtí an mhapáil φ^{-1}, agus φ^n go dtí φ^{-n}. Más ciogal aomaíoch é C do φ, is pointe aomaíoch é p do φ^n, agus dá bhrí sin is pointe éarthaíoch é p do φ^{-n}. Ach coiméadann comhchuingeas éarthaíocht pointe, agus fágann sin gur pointe éarthaíoch é p do φ^n freisin. De réir an leama, ní féidir sin. Dá bhrí sin, ní ciogal aomaíoch é C do φ. Sa tslí chéanna (ag malartú φ agus φ^{-1}) feictear nach ciogal éarthaíoch é, ach oiread.

4 SAMPLAÍ

Mar shampla ón ailgéabar líneach, smaoinidh ar mhaitrísí 2×2 ós cionn $\mathbb{C}$, ag smaoineamh orthu mar mhapáileanna de $\mathbb{C}^2$ ann féin. Bíodh A,B ina leithéid de mhaitrísí, le $A^2 = B^2 = \mathrm{I}$. Is féidir, mar is eol, athrú comhordanáidí a dhéanamh agus an dá rud a chomhchuingeadh ag an am céanna go

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu^{-1} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

le $\mu \neq 0$. Munar isiméadracht an toradh

$$AB = \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 \\ 0 & \mu^{-2} \end{pmatrix},$$

tá sé ag forbairt i dtreo amháin agus ag crapadh i dtreo eile.

I gcointéacs níos ginearálta, más maineafóild (iolartha) Riemannach é X agus má tá φ indifréalaithe le pointe fosaithe p agus le siméadracht amchúlú τ a fhágann p fosaithe, ansin tá $\det(\varphi')(p) = \pm 1$, agus dá bhrí sin caithfear go bhfuil cúiteamh ann idir forbairt i dtreonna áirithe agus crapadh i dtreonna eile.

Mar shampla domhanda, smaoinidh ar $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mar an sféar $\mathbb{S}^2$, agus bíodh

$$f(z) = \frac{az^2 + bz + c}{dz^2 + cz + f}$$

feidhm chóimheasta ailgéabrach den tarna órd. Sainítear ionbhlóid $\tau : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ tríd

$$f^{-1}(f(z)) = \{z, \tau(z)\}.$$

Ansin is feidhm anailíseach í τ, agus dítheilgeach, agus dá bhrí sin tá

$$\tau(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Éiríonn gach trasfhoirm Möbius gur ionbhlóid í sa tslí seo: nuair a thugtar ionbhlóid

$$\tau(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

tóg (cf. an fhoirmle ó chruthú (2.3))

$$f(z) = (z - \tau(z))^2 = \left\{ \frac{(\gamma - \alpha)z + (\delta - \beta)}{\gamma z + \delta} \right\}^2.$$

Le dhá f, abair f_1 agus f_2, gheibhtear dhá ionbhlóid τ_1 agus τ_2, agus córas $\varphi = \tau_1 \circ \tau_2$ le siméadracht amchúlú ionbhlóideach τ_1. Ar ndóigh, is trasfhoirm Möbius í φ, freisin. Tá trí chás ann:

1°. Níl ach pointe fosaithe amháin ag φ, abair p. Ansin tá $\tau_1(p) = \tau_2(p) = p$ agus is pointe neodrach é p do φ.

2°. Tá dhá phointe fosaithe ag φ, abair p_1 agus p_2, agus tá $\tau_1(p_1) = p_1$. Ansin tá $\tau_1(p_2) = p_2$ agus (de réir (3.2)) is pointí neodracha iad araon, agus is trasfhoirm éilipseach í φ.

3°. Tá dhá phointe fosaithe ag φ, abair p_1 agus p_2, agus tá $\tau_1(p_1) = p_2$. Ansin tá $\tau_1(p_2) = p_1$, agus ní chuireann (3.2) aon bhac ar p_1 a bheith mar phointe aomaíoch ag φ (chomh fada is atá p_2 mar phointe éarthaíoch le hiolraitheoir le luach uimhriuíl deilíneach, i gcomparáid le hiolraitheoir p_1). Tárlaíonn an cás seo. Mar shampla, tóg

$$\varphi(z) = 2z,$$
$$\tau_1(z) = \frac{-1}{z}.$$

Taispeánann an sampla seo go bhfuil an hipitéis $\tau(p) \in C$ riachtanach i (3.2).

Breathnú. Is féidir tairbhe eile a bhaint as eiseadh siméadrachta ionbhlóidí amchúlaithe. Tugtar grúpa *déhéidreach* ar ghrúpa a ghintear le dhá ionbhlóid, mar tá grúpa críochta siméadrachtaí pholagáin rialta den tsaghas sin. Críochta nó éigríochta, bíonn fo-ghrúpa cioglach de inéacs 2 ag a leithéid de ghrúpa, agus is grúpa 'beag' é, sa mhéid is go bhfásann líon na n-eilimintí gur féidir iad a scríobh mar fhocal le faid n sna gineadóirí ar shlí líneach le n. Dá bhrí sin tá uirlisí mar theoric ergoidíochta, oibreoirí méanacha, agus a leithéid, ar fáil. Baineadh úsáid as uirlisí mar iad suíd, mar shampla, i [3, 5].

TAGAIRTÍ

1. H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Celeste, Tome I. Gauthier–Villars. Paris. 1892.

2. G.D. Birkhoff, The restricted problem of three bodies. *Rend. Circ. Mat. Palermo.* **39** (1915), 265-334.

3. D. Marshall and A.G. O'Farrell, Uniform approximation by real functions. *Fund. Math.* **54** (1979), 203-11.

4. J.K. Moser and S.M. Webster, Normal forms for real surfaces in $\mathbb{C}^2$ near complex tangents and hyerbolic surface transformations. *Acta Math.* **150** (1983), 255-96.

5. D. Marshall and A.G. O'Farrell, Approximation by a sum of two algebras. *J. Functional Analysis* **52** (1983), 253-68.

6. R.L.Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd Ed. Addision–Wesley. Redwood City, California. 1989

7. M.A. Sanabria–Garcia and A.G. O'Farrell, De Paepe's disc has nontrivial polynomial hull. *preprint 2001.*